

唐山市 2020~2021 学年度高三年级摸底考试

数学参考答案

一. 选择题 (单选):

1~4. BBCD 5~8. DAAD

二. 选择题 (不定项选):

9. CD 10. ABC 11. ABD 12. BC

三. 填空题:

13. 2 14. 0 15. $x^2+(y-1)^2=2$ 16. 10π

四. 解答题:

17. 解:

条件①, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $2c \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = b$4 分

所以 $a=c$, 又 $a=2$.

从而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = 2 \sin B$, ...8 分

所以 $B = \frac{\pi}{2}$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值 2. ...10 分

条件②, 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可得 $2 \sin B - \sin A = 2 \sin C \cos A$.

又 $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,

所以 $2 \sin A \cos C + 2 \cos A \sin C - \sin A = 2 \sin C \cos A$,

从而 $2 \sin A \cos C = \sin A$, ...4 分

因为 $\sin A \neq 0$, 所以 $\cos C = \frac{1}{2}$,

可得 $C = 60^\circ$, 即 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$8 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab \geq ab$.

所以 $a=b=2$ 时, ab 取得最大值 4,

故 $a=b=2$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{4}$10 分

条件③, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a+b)^2 - 2ab(1 + \cos C)$,

又 $a+b=2c=4$, 所以 $ab(1 + \cos C) = 6$4 分

因为 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $ab \leq 4$, 等号当且仅当 $a=b=2$ 时成立.

从而 $1 + \cos C \geq \frac{3}{2}$, 即 $\cos C \geq \frac{1}{2}$, 所以 $0^\circ < C \leq 60^\circ$8 分

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$,

当 $a=b=2$ 时, ab 和 $\sin C$ 分别取得最大值 4 和 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因此 $a=b=2$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{4}$10 分

18. 解:

(1) 由 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - n + 1$ 得

$a_{n+2} - a_{n+1} - (n+1) = 2a_{n+1} - 2a_n - n + 1 - (n+1) = 2(a_{n+1} - a_n - n)$,

又 $a_2 - a_1 - 1 = 1$, 所以 $\{a_{n+1} - a_n - n\}$ 是以 1 为首项, 以 2 为公比的等比数列.

...5 分

(2) 由 (1) 得 $a_{n+1}-a_n-n=2^{n-1}$, 所以 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}+n$, ...7 分

$$\begin{aligned} \text{所以 } n \geq 2 \text{ 时, } (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1}) \\ &= (2^0+1)+(2^1+2)+(2^2+3)+\cdots+(2^{n-2}+n-1) \\ &= (2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2})+[1+2+3+\cdots+(n-1)] \\ &= 2^{n-1}-1+\frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned} \quad \text{...10 分}$$

$$\text{因此 } a_n-a_1=2^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}-1, \quad a_n=2^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也满足上式,

$$\text{故 } a_n=2^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}. \quad \text{...12 分}$$

19. 解:

(1) 连接 BD , 由题意可知 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 又 E 是 AD 的中点, 所以 $BE \perp AD$; 由 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $BE \subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $PD \perp BE$, 且 $PD \cap AD=D$,

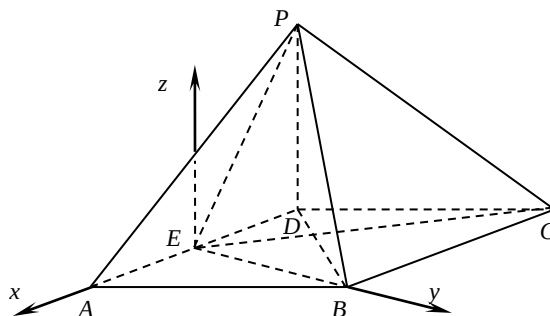
所以, $BE \perp$ 平面 PAD , 且 $BE \subset$ 平面 PBE , 所以平面 $PBE \perp$ 平面 PAD4 分

(2) 由 (1) 可知, PB 在平面 PAD 上的射影为 PE , 所以直线 PB 与平面 PAD 所成角为 $\angle BPE=45^\circ$.

$$\text{在 Rt}\triangle BPE \text{ 中, } PE=BE=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=\sqrt{3}.$$

$$\text{所以, 在 Rt}\triangle DPE \text{ 中, } DE=\frac{1}{2}AD=1, \quad PD=\sqrt{PE^2-DE^2}=\sqrt{2}. \quad \text{...6 分}$$

以 E 为原点, $\overrightarrow{EA}$ 的方向为 x 轴正方向, $\overrightarrow{EB}$ 的方向为 y 轴正方向, $|\overrightarrow{EA}|$ 为单位长, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$.



$$\begin{aligned} \text{由题设可得 } P(-1, 0, \sqrt{2}), C(-2, \sqrt{3}, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), \text{ 所以 } \overrightarrow{EP}=(-1, 0, \sqrt{2}), \\ \overrightarrow{EC}=(-2, \sqrt{3}, 0). \end{aligned} \quad \text{...8 分}$$

$$\text{设 } \mathbf{m}=(x, y, z) \text{ 是平面 } PEC \text{ 的法向量, 则 } \begin{cases} \overrightarrow{EP} \cdot \mathbf{m}=0, \\ \overrightarrow{EC} \cdot \mathbf{m}=0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -x+\sqrt{2}z=0, \\ -2x+\sqrt{3}y=0, \end{cases}$$

$$\text{可取 } \mathbf{m}=\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad \text{...10 分}$$

由 (1) 知 $\overrightarrow{EB}=(0, \sqrt{3}, 0)$ 是平面 PED 的一个法向量,

$$\text{则 } \cos \langle \overrightarrow{EB}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{EB} \cdot \mathbf{m}}{|\overrightarrow{EB}| |\mathbf{m}|} = \frac{2\sqrt{34}}{17}.$$

所以二面角 $C-PE-D$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{34}}{17}$. …12 分

20. 解:

将田忌的三匹马按照上、中、下三等分别记为 T_1 、 T_2 、 T_3 ，齐威王的三匹马按照上、中、下三等分别记为 W_1 、 W_2 、 W_3 ，并且用马的记号表示该马上场比赛。

(1) 法一.

在第一局比赛中，每一匹马上场的概率都是 $\frac{1}{3}$ ，可以按照如下方式进行讨论：

若齐威王派出的是 W_1 ，则田忌必然失败；

若齐威王派出的是 W_2 ，则田忌只有派出 T_1 才能胜利；

若齐威王派出的是 W_3 ，则田忌派出 T_1 或 T_2 皆可胜利；

设事件 A = “在第一局比赛中田忌胜利”，则 $A = W_2T_1 + W_3T_1 + W_3T_2$ ，

则在第一局比赛中田忌胜利的概率是 $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. …4 分

法二.

设事件 Ω = “第一局双方参赛的马匹”，

事件 A = “在第一局比赛中田忌胜利”，

由题意得 $\Omega = \{(T_1W_1), (T_1W_2), (T_1W_3), (T_2W_1), (T_2W_2), (T_2W_3), (T_3W_1), (T_3W_2), (T_3W_3)\}$ ，

$A = \{(T_1W_2), (T_1W_3), (T_2W_3)\}$ ，

则在第一局比赛中田忌胜利的概率是 $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. …4 分

(2) 法一.

设事件 B = “第一局齐威王派出场的是上等马，而田忌派出场的是下等马”，

设事件 C = “田忌获得本场比赛胜利”。

由于第一局失败，田忌第二局和第三局必须都胜利才能获得本场比赛胜利。依题设，田忌若第二局胜利，第三局必然胜利，因此，只考虑第二局的对阵情况即可，故 $C|B = (W_2|W_1)(T_1|T_3) + (W_3|W_1)(T_2|T_3)$ 。

则本场比赛田忌胜利的概率是 $P(C|B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. …8 分

法二.

设事件 B = “第一局齐威王派出场的是上等马，而田忌派出场的是下等马”，

事件 C = “田忌获得本场比赛胜利”，

由题意得 $B = \{(T_3W_1, T_1W_2, T_2W_3), (T_3W_1, T_1W_3, T_2W_2), (T_3W_1, T_2W_2, T_1W_3), (T_3W_1, T_2W_3, T_1W_2)\}$ ，

$BC = \{(T_3W_1, T_1W_2, T_2W_3), (T_3W_1, T_2W_3, T_1W_2)\}$ ，

则本场比赛田忌胜利的概率是 $P(C|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. …8 分

(3) $\frac{1}{6}$. …12 分

21. 解:

$$(1) \text{ 由题意得 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2}{3}, \text{ 整理得 } a^2 = 3b^2, \quad \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由 } t=0 \text{ 时, } |AB| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ 得 } \frac{1}{a^2} + \frac{2}{3b^2} = 1 \quad \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } a = \sqrt{3}, b = 1. \text{ 故 } E \text{ 的方程是 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1. \quad \cdots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } D(3, y_1).$$

$$\text{将 } x = ty + 1 \text{ 代入 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \text{ 得 } (t^2 + 3)y^2 + 2ty - 2 = 0,$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{2t}{t^2 + 3}, y_1 \cdot y_2 = -\frac{2}{t^2 + 3}, \quad \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\text{从而 } ty_1 \cdot y_2 = y_1 + y_2. \quad \cdots \text{①} \quad \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } BD: y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - 3}(x - 3) + y_1, \text{ 设直线 } BD \text{ 与 } x \text{ 轴的交点为 } (x_0, 0),$$

$$\text{则 } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - 3}(x_0 - 3) + y_1 = 0, \quad \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } x_0 = \frac{y_1(3 - x_2)}{y_2 - y_1} + 3 = \frac{y_1(2 - ty_2)}{y_2 - y_1} + 3 = \frac{2y_1 - ty_1y_2}{y_2 - y_1} + 3, \quad \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\text{将①式代入上式可得 } x_0 = 2.$$

$$\text{故直线 } BD \text{ 过定点 } (2, 0). \quad \cdots 12 \text{ 分}$$

22. 解:

$$(1) f'(x) = a - \frac{1}{x}, x > 0, a > 0.$$

$$\text{所以 } 0 < x < \frac{1}{a} \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减};$$

$$\text{当 } x > \frac{1}{a} \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增},$$

$$\text{因此 } f(x) \text{ 的最小值为 } f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a. \quad \cdots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 令 } g(x) = f(x) + xe^{-ax} - 1,$$

$$\text{则 } g'(x) = a - \frac{1}{x} - (ax - 1)e^{-ax} = \frac{(ax - 1)(e^{ax} - x)}{xe^{ax}}. \quad \cdots 5 \text{ 分}$$

$$\text{由 (1) 得, 当 } a > \frac{1}{e} \text{ 时, } f\left(\frac{1}{a}\right) > 0, \text{ 即 } ax - \ln x > 0, \text{ 所以 } e^{ax} > x, \quad \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 0 < x < \frac{1}{a} \text{ 时, } g'(x) < 0, g(x) \text{ 单调递减};$$

$$x > \frac{1}{a} \text{ 时, } g'(x) > 0, g(x) \text{ 单调递增},$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 的最小值为 } g\left(\frac{1}{a}\right) = \ln a + \frac{1}{ea}. \quad \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 (1) 得 } a = \frac{1}{e} \text{ 时, } f(x) \geq 0, \text{ 所以 } \frac{x}{e} \geq \ln x, \text{ 等号当且仅当 } x = e \text{ 时成立},$$

$$\text{所以当 } a > \frac{1}{e}, x = \frac{1}{a} \text{ 时, 有 } \frac{1}{ea} > \ln \frac{1}{a} = -\ln a, \text{ 即 } \ln a + \frac{1}{ea} > 0,$$

$$\text{所以 } g(x) > 0. \text{ 故原不等式得证.} \quad \cdots 12 \text{ 分}$$