

中学生标准学术能力诊断性测试 2020 年 9 月测试

理科数学答案

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	B	B	B	A	D	C	B	A	B	C

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(-2, -1) \cup (1, 7)$

14. $(2, \pm 2\sqrt{2})$

15. 120

16. $-\frac{13}{4}$

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 60 分.

17. 解:

(1) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{3}$, 得 $ab = 4$ ① 2 分

又由 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 4 = 4$, 得 $a^2 + b^2 = 8$ ② 4 分

联立①②解得 $a = b = 2$ 5 分

(2) 因为 $2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 6 分

$$\text{所以 } a + b = \frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin A + \sin B) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left[\sin A + \sin \left(\frac{2\pi}{3} - A \right) \right]$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \right) = 4 \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) \text{ 8 分}$$

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以 $A \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$, 从而 $A + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$,

所以 $\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,10 分

所以 $a + b \in (2\sqrt{3}, 4]$, 即 $a + b$ 的取值范围是 $(2\sqrt{3}, 4]$ 12 分

18. 解:

(1) 证明: 取 PC 中点 G , 连接 EG, FG ,

则 $EG \parallel DC \parallel AF, EG = \frac{1}{2}DC = AF$,2 分

所以 $AEGF$ 是平行四边形, $AE \parallel FG$,3 分

$\therefore AE \not\subset$ 面 PEC , $FG \subset$ 面 PFC ,

$\therefore AE \parallel$ 平面 PFC 5 分

(2) 因为 $AF \parallel$ 平面 PDC , 所以点 A, F 到平面 PCD 的距离相等6 分

由 $CD \perp AD$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

可得 $CD \perp$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp AE$,7 分

由 E 是 PD 中点, $\triangle PAD$ 是正三角形, 所以 $AE \perp PD$,8 分

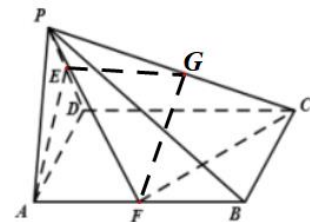
$CD \cap PD = D$, 所以 $AE \perp$ 面 PCD 9 分

设 $AB = 2a$,

则 CF 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{AE}{CF} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 11 分

所以 $a = 2$, 即 $AB = 4$ 12 分

(建系或作出线面角的平面角按步骤相应给分)



(第 18 题图)

19. 解:

(1) $\because a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1} - \frac{3n}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore \frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1} - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,2 分

由累加法, 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{1} = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \dots - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

代入 $a_1 = \frac{1}{2}$ 得, $n \geq 2$ 时,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

又 $a_1 = \frac{1}{2}$ 适合上式, 故 $a_n = n + n\left(-\frac{1}{2}\right)^n (n \in N^*)$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 解法一: $2S_n - 3n^2 + 5n > 0 \Leftrightarrow S_n - \frac{3n^2 - 5n}{2} > 0$, 数列 $\{3n - 4\}$ 的前 n 项和为

$$\frac{3n^2 - 5n}{2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

令 $c_n = a_n - 3n + 4 = n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 4$, 其前 n 项和为 $C_n = S_n - \frac{3n^2 - 5n}{2}$,
 $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

则有 $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{19}{8}$, 故 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 < 0$.

当 $n \geq 4$ 时, $c_n = n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 4 = n \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] - n + 4 < 0$,

则有 $C_n < 0$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上所述, 不等式成立的 n 为 1 与 2. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

解法二: 令 $b_n = n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, 其前 n 项和为 T_n , 用错位相减法求和,

$$T_n = \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$-\frac{1}{2}T_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

两式相减得:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}T_n &= \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= -\frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) - n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{n}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

所以 $T_n = -\frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9} + \frac{n}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,8 分

则有 $S_n = \frac{n^2 + n}{2} - \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9} + \frac{n}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$9 分

记 $f(n) = 2S_n - 3n^2 + 5n = -2n^2 + 6n - \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9} + \frac{2n}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

当 $n=1$ 时, $f(1)=3>0$; 当 $n=2$ 时, $f(2)=4>0$;

当 $n \geq 3$ 且 n 为奇数, $-2n^2 + 6n - \frac{4}{9} < 0$, $\left(\frac{4}{9} + \frac{2n}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n < 0$, 则 $f(n) < 0$

当 $n \geq 3$ 且 n 为偶数,

$-2n^2 + 6n - \frac{4}{9} \leq -32 + 24 - \frac{4}{9} = -\frac{76}{9}$, $\left(\frac{4}{9} + \frac{2n}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{4}{9} + \frac{2n}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$,

则 $f(n) < 0$11 分

综上所述, 不等式成立的 n 为 1 与 2.12 分

20.解:

(1) 由于椭圆 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $a = \sqrt{2}c$. 又 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $b = c$.

所以椭圆 C 的方程为 $x^2 + 2y^2 = a^2$ 2 分

又点 $P\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在椭圆上, 所以 $a^2 = 2$,

所以, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 3 分

设直线 PA 的斜率为 $k(k \neq 0)$, 则直线 PB 的斜率为 $-k$,

则直线 PA 的方程为 $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = k(x-1)$.

代入椭圆方程可得 $(2k^2 + 1)(x-1)^2 + (2\sqrt{2}k + 2)(x-1) = 0$

所以 $x_A = 1 - \frac{2(1 + \sqrt{2}k)}{1 + 2k^2}$, $y_A = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2(k + \sqrt{2}k^2)}{1 + 2k^2}$

同理可知, $x_B = 1 - \frac{2(1-\sqrt{2}k)}{1+2k^2}$, $y_B = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2(-k+\sqrt{2}k^2)}{1+2k^2}$ 5分

$$\text{所以 } k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2(k+\sqrt{2}k^2) - 2(-k+\sqrt{2}k^2)}{2(1+\sqrt{2}k) - 2(1-\sqrt{2}k)} = \frac{4k}{4\sqrt{2}k} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故直线 AB 的斜率为定值.6分

(2) 设直线 AB 的方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + t$, 直线 $x=1$ 和直线 AB 相交于点 Q ,

$$\text{则 } Q\left(1, t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ 所以 } |PQ| = |t|.$$

把 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + t$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 可得 $x^2 + \sqrt{2}tx + t^2 - 1 = 0$ 8分

$$\because \Delta = 2t^2 - 4(t^2 - 1) > 0, \therefore t^2 < 2, \text{ 由韦达定理, 可知 } \begin{cases} x_A + x_B = -\sqrt{2}t \\ x_A \cdot x_B = t^2 - 1 \end{cases},$$

$$\text{所以 } (x_B - x_A)^2 = (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B = 2t^2 - 4(t^2 - 1) = 4 - 2t^2,$$

$$\text{即 } |x_B - x_A| = \sqrt{2(2 - t^2)} \text{10分}$$

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |x_B - x_A| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{t^2(2 - t^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - (t^2 - 1)^2} \quad (-\sqrt{2} < t < \sqrt{2})$$

所以当 $t = \pm 1$ 时, ΔPAB 的面积 S 取得最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12分

21.解:

(1) 由题意得 $f'(x) = ae^x$, 所以, $f'(1) = ae = 1$, 解得 $a = \frac{1}{e}$,2分

又因为 $f(1) = \frac{1}{e} \cdot e^1 + b = 1$, 所以 $b = 0$, 所以 $f(x) = e^{x-1}$ 3分

(2) 证明: 对 x 的取值范围分类讨论:

① $0 < x < 1$ 时, $e^{-1} < e^{x-1} < 1$, $\ln x < 0$, 所以 $e^{x-1} \cdot \ln x > \ln x$

$$\text{有: } f(x) \ln x + \frac{3}{x} = e^{x-1} \ln x + \frac{3}{x} > \ln x + \frac{3}{x},$$

令 $g(x) = \ln x + \frac{3}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{x-3}{x^2} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

所以 $g(x) > g(1) = 3 > \frac{5}{2}$, 即 $f(x) \ln x + \frac{3}{x} = e^{x-1} \ln x + \frac{3}{x} > \ln x + \frac{3}{x} > 3 > \frac{5}{2}$,

故 $0 < x < 1$ 时, 不等式成立;6 分

② $x \geq 1$ 时, 先证明不等式 $e^{x-1} \geq x$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立,

令 $h(x) = e^{x-1} - x (x \geq 1)$, 则 $h'(x) = e^{x-1} - 1 \geq 0$,

所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) \geq h(1) = 0$

即不等式 $e^{x-1} \geq x$ 成立,8 分

而此时 $\ln x \geq 0$, 于是有 $f(x) \ln x + \frac{3}{x} = e^{x-1} \ln x + \frac{3}{x} \geq x \ln x + \frac{3}{x}$,

要证 $f(x) \ln x + \frac{3}{x} > \frac{5}{2}$ 成立, 可证其加强条件: $x \ln x + \frac{3}{x} > \frac{5}{2}$,

即证: $\ln x + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{2x} > 0$ 在 $x \geq 1$ 时成立,

令 $m(x) = \ln x + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{2x} (x \geq 1)$,

则 $m'(x) = \frac{1}{x} - \frac{6}{x^3} + \frac{5}{2x^2} = \frac{2x^2 + 5x - 12}{2x^3} = \frac{(2x-3)(x+4)}{2x^3}$,

所以 $m(x)$ 在 $\left[1, \frac{3}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $m(x) \geq m\left(\frac{3}{2}\right) = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$,10 分

由于 $\frac{27}{8} > 3 > e$, 因此 $\frac{3}{2} > e^{\frac{1}{3}}$, 所以 $\ln \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$

所以 $m(x) \geq m\left(\frac{3}{2}\right) = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} > 0$,

$$\text{即 } m(x) = \ln x + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{2x} > 0$$

$$\text{即 } \ln x + \frac{3}{x} > \frac{5}{2}$$

$$\text{所以 } f(x) \ln x + \frac{3}{x} = e^{x-1} \ln x + \frac{3}{x} \geq x \ln x + \frac{3}{x} > \frac{5}{2}, \text{ 故 } x \geq 1 \text{ 时, 命题成立.}$$

$$\text{综上, 当 } x > 0 \text{ 时, 有 } f(x) \ln x + \frac{3}{x} > \frac{5}{2} \text{ 成立.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

$$(1) \text{ 解: 因为 } \frac{|PQ|}{|MN|} + \frac{|MN|}{|PQ|} \geq 2 \sqrt{\frac{|PQ|}{|MN|} \cdot \frac{|MN|}{|PQ|}} = 2,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{|PQ|}{|MN|} = \frac{|MN|}{|PQ|} \text{ 即 } |PQ| = |MN| \text{ 时取“=”}$$

$$\text{故 } |MN| = |PQ|$$

所以直线 PQ 的倾斜角为 45° 或 135° ,2 分

即直线 PQ 的极坐标方程是

$$\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 5, \text{ 或 } \rho \cos \theta - \rho \sin \theta = 5. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 解: 因为 } 24 \leq |MN| \leq 26, 24 \leq |PQ| \leq 26,$$

$$\text{故 } \frac{12}{13} \leq \frac{|PQ|}{|MN|} \leq \frac{13}{12} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

又函数 $f(x) = x + \frac{1}{2x}$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

$f(x)$ 在 $\left[\frac{12}{13}, \frac{13}{12}\right]$ 上单调递增.

将 $x = \frac{12}{13}, x = \frac{13}{12}$ 分别代入,

$$f\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{12}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{13}{12} = \frac{457}{312}, \quad f\left(\frac{13}{12}\right) = \frac{13}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{12}{13} = \frac{241}{156} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{|PQ|}{|MN|} + \frac{|MN|}{2|PQ|} \text{ 的最大值为 } \frac{241}{156}, \text{ 最小值为 } \frac{457}{312} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

$$\text{因为 } a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a + 2b = a + b + b \geq 3\sqrt{ab^2}, \quad \text{当且仅当 } \begin{cases} a = b \\ a + 2b = 3 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 时取}$$

“=”2 分

$$(1) \because a + 2b = 3, \therefore 0 < ab^2 \leq 1, \text{ 可得 } \frac{1}{ab^2} \geq 1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^4}} \geq 3$$

当且仅当 $a = b = 1$ 时, 取到最小值 3.5 分

$$(2) \text{ 因为 } x, y \text{ 是正数, 且 } \frac{2}{x} + \frac{9}{y} = 1$$

$$\text{所以, } \frac{4}{2x^2+x} + \frac{9}{y^2+y} = \frac{\frac{16}{x^2}}{8+\frac{4}{x}} + \frac{\frac{81}{y^2}}{9+\frac{9}{y}} = \left(\frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{9}{y}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{18} \left[\left(\sqrt{8+\frac{4}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{9+\frac{9}{y}}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{9}{y}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}}\right)^2 \right]$$

$$\geq \frac{1}{18} \left(\sqrt{8+\frac{4}{x}} \times \frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}} + \sqrt{9+\frac{9}{y}} \times \frac{\frac{9}{y}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}} \right)^2 = \frac{1}{18}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{\frac{4}{x}}{\sqrt{8+\frac{4}{x}}} = \frac{\frac{9}{y}}{\sqrt{9+\frac{9}{y}}} \text{ 时, 即 } \frac{\frac{4}{x}}{8+\frac{4}{x}} = \frac{\frac{9}{y}}{9+\frac{9}{y}}, \text{ 即 } y = 2x \text{ 时, 取等号。}$$

又 $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 1$, 所以当 $x = \frac{17}{2}, y = 17$ 时, $\frac{4}{2x^2 + x} + \frac{9}{y^2 + y}$ 取到最小值 $\frac{1}{18}$ 10 分