$\therefore$（*）式方程无正整数解.

综上：存在唯一的正整数解 $(p,q)=(2,3)$ 使 b_1,b_p,b_q 成等比数列.

解题后记 单调数列可确定数列的范围，进而可确定方程是否有解.

6 归纳总结

从以上可以看出这类问题的解决策略是：假定题中的数学对象存在或结论成立或暂且认可其中的一部分结论，然后在这个前提下进行逻辑推理，若由此导出矛盾，则否定假设；否则，给出肯定结论，在这其中反证法在解题中起着重要的作用.

通法很重要　通俗更精彩

——关于若干对称不等式简约证明

李文明　　福建省福州华侨中学（350004）

初等对称不等式的证明不仅是初等不等式研究的重要内容，而且是国际国内初等数学竞赛热点问题. 通常情况下都是运用一些著名的不等式定理或者划归为函数问题进而利用导数解决，难度之大，技巧之多，方法之活，过程之繁都是很多初学者非常困惑的问题. 笔者对初等对称不等式进行长期观察、分析、思考、探究发现对称不等式问题的证明与求解可以划归为统一的方法——设序、作差、放缩、极值，充分展示出问题的数学本质，大道至简，至简大美，避免冗长，过程简约，非常具有推广价值. 下面我们举例说明.

1 无条件对称不等式的证明

例1 （2018年陕西省高中数学竞赛预赛试题）设 a,b,c 均为正实数，求证：$\frac{a(a^2+bc)}{b+c}+\frac{b(b^2+ac)}{c+a}+\frac{c(c^2+ab)}{a+b}\ge ab+bc+ca$.

证明 不妨设 $a\ge b\ge c>0$，

则 $\frac{a(a^2+bc)}{b+c}+\frac{b(b^2+ac)}{c+a}+\frac{c(c^2+ab)}{a+b}-(ab+bc+ca)$

$\ge\frac{3c\cdot 2c^2}{2a}-3a^2=\frac{3(c^3-a^3)}{a}$ 恒成立，

因此 $\frac{a(a^2+bc)}{b+c}+\frac{b(b^2+ac)}{c+a}+\frac{c(c^2+ab)}{a+b}$

$-(ab+bc+ca)\ge[\frac{3(c^3-a^3)}{a}]_{\max}=0$，

当且仅当 $a=b=c$ 时“=”成立！

例2 （《数学通报》2018年6月号问题2427）设 a,b,c 是正实数，x,y,z 是实数，求证：$\frac{a(y^2+z^2)}{b+c}+\frac{b(z^2+x^2)}{c+a}+\frac{c(x^2+y^2)}{a+b}\ge xy+yz+zx$.（陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心安振平供题）

证明 不妨设 $a\ge b\ge c>0$，$x^2\ge y^2\ge z^2\ge 0$，

$\Rightarrow|x|\ge|y|\ge|z|\ge 0$，

则 $\frac{a(z^2+y^2)}{b+c}+\frac{b(z^2+x^2)}{a+c}+\frac{c(x^2+y^2)}{b+a}$

$-(|x||y|+|y||z|+|z||x|)$

$\ge\frac{3c\times 2z^2}{2a}-3x^2=\frac{3(cz^2-ax^2)}{a}$ 恒成立，

因此 $\frac{a(z^2+y^2)}{b+c}+\frac{b(z^2+x^2)}{a+c}+\frac{c(x^2+y^2)}{b+a}$

$-(|x||y|+|y||z|+|z||x|)$

$\ge[\frac{3(cz^2-ax^2)}{a}]_{\max}=0$.

所以 $\frac{a(z^2+y^2)}{b+c}+\frac{b(z^2+x^2)}{a+c}+\frac{c(x^2+y^2)}{b+a}$

$\ge(|x||y|+|y||z|+|z||x|)$

$\ge xy+yz+zx$.

当且仅当 $a=b=c$，且 $x^2=y^2=z^2$ 时“=”成立.

2 有条件对称不等式的证明

例3 （《数学通报》2018年6月号问题2429）设 a,b,c 为正数，$a^2+b^2+c^2=3$，求证：$\frac{a^a+1}{b^2+c^2}+\frac{b^b+1}{c^2+a^2}+\frac{c^c+1}{a^2+b^2}\ge 3$.（福建省闽清县教师进修学校黄如炎供题）

证明 不妨设 $a\ge b\ge c>0$

$\Rightarrow 3a^2\ge a^2+b^2+c^2=3\ge 3c^2>0$

$\Rightarrow a\ge 1\ge c>0$，

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 $a \ge b \ge 1 \ge c > 0$ 时，$c^c \ge c$，

则 $\frac{a^a+1}{b^2+c^2}+\frac{b^b+1}{a^2+c^2}+\frac{c^c+1}{a^2+b^2} \ge \frac{1+1+c+3}{2a^2}$ 恒成立，

故 $\frac{a^a+1}{b^2+c^2}+\frac{b^b+1}{a^2+c^2}+\frac{c^c+1}{a^2+b^2} \ge (\frac{1+1+c+3}{2a^2})_{\max}=3$，

当 $a \ge 1 \ge b \ge c > 0$ 时，$b^b \ge b \ge c$，$c^c \ge c$，

则 $\frac{a^a+1}{b^2+c^2}+\frac{b^b+1}{a^2+c^2}+\frac{c^c+1}{a^2+b^2} \ge \frac{1+2c+3}{2a^2}$ 恒成立，

因此 $\frac{a^a+1}{b^2+c^2}+\frac{b^b+1}{a^2+c^2}+\frac{c^c+1}{a^2+b^2}$

$\ge (\frac{1+2c+3}{2a^2})_{\max}=3$，

当且仅当 $a=b=c=1$ 时“=”成立.

例 4 （《数学通报》2018 年 5 月号问题 2425）已知 a,b,c 为正实数且 $abc=1$，$n \in \mathbf{N}_+$. 求证 $\frac{a^3}{\sqrt[n]{b+c}}+\frac{b^3}{\sqrt[n]{c+a}}+\frac{c^3}{\sqrt[n]{a+b}} \ge \frac{ab+bc+ca}{\sqrt[n]{2}}$.（安徽省岳西中学储百六供题）

证明 不妨设 $a \ge b \ge c \ge 0$

$\Rightarrow a^3 \ge abc = 1 \ge c^3 > 0$

$\Rightarrow a \ge 1 \ge c > 0$，

所以 $\frac{a^3}{\sqrt[n]{b+c}}+\frac{b^3}{\sqrt[n]{b+a}}+\frac{c^3}{\sqrt[n]{b+a}}-\frac{ab+bc+ca}{\sqrt[n]{2}}$

$\ge \frac{3c^3}{\sqrt[n]{2a}}-\frac{3a^2}{\sqrt[n]{2}}$ 恒成立，

因此 $\frac{a^3}{\sqrt[n]{b+c}}+\frac{b^3}{\sqrt[n]{b+a}}+\frac{c^3}{\sqrt[n]{b+a}}-\frac{ab+bc+ca}{\sqrt[n]{2}}$

$\ge (\frac{3c^3}{\sqrt[n]{2a}}-\frac{3a^2}{\sqrt[n]{2}})_{\max}=0$，

当且仅当 $a=b=c=1$ “=”成立.

例 5 （《数学通讯》2018 年第 1 期问题 332）设正数 x,y,z 满足 $xy+yz+zx \le 3$，求证：$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2} \ge \frac{3}{4}$.（陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心安振平供题）

证明 不妨设 $x \ge y \ge z > 0$

$\Rightarrow 3z^2 \le xy+yz+zx \le 3$

$\Rightarrow 0 < z \le 1$，

则 $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2} \ge \frac{3}{(1+x)^2}$ 恒成立，

因此 $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2} \ge [\frac{3}{(1+x)^2}]_{\max}$

$=\frac{3}{(1+z)^2} \ge \frac{3}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}$，

当且仅当 $x=y=z=1$ 时“=”成立.

3 可化为对称不等式的证明

例 10 （《数学通报》2018 年 7 月号问题 2435）设 A,B,C 为 ΔABC 的内角，则 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos C \le \frac{1}{54}\cdot(5\sqrt{10}+14)$，当且仅当 $A=B$ 且 $\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{10}-2}{6}$ 时等号成立.（陕西延安育英中学尚生陈供题）

证明 由余弦函数性质，欲使 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos C$ 取得最大值，ΔABC 中的 $\angle C$ 应为锐角，不妨设 $\pi > A \ge B > 0$，且 $\pi > A+B > \frac{\pi}{2}$.

$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos C$

$=-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos(A+B)$

$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}(\sin A\sin B-\cos A\cos B)$

$\le \cos^2\frac{B}{2}(\sin^2 A-\cos^2 A)$

$=\cos^2\frac{B}{2}(1-2\cos^2 A)$ 恒成立，

因此 $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos C$

$\le [\cos^2\frac{B}{2}(1-2\cos^2 A)]_{\min}$

$=\cos^2\frac{A}{2}(1-2\cos^2 A)$

$=\frac{1}{2}(1+\cos A)(1-2\cos^2 A)$

$=-\cos^3 A-\cos^2 A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}$.

设 $\cos A = t\ (-1<t<1)$，

$f(t)=-t^3-t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(t)=-3t^2-2t+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(\frac{\sqrt{10}-2}{6})=0$，

所以 $f(t)_{\max}=f(\frac{\sqrt{10}-2}{6})=\frac{1}{54}(14+5\sqrt{10})$，

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当且仅当 $\cos A=\cos B=\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{10}-2}{6}$ “=”成立.

上述证明中，我们从实数有序性的三个公理出发，将无序问题有序处理；多元问题减元处理；一般问题特殊处理；大小问题放缩处理；极值问题定值处理；变量问题常量处理，万变不离其宗，自然简约，清新流畅．由此可见，不等式问题的根和魂是函数，这也是为什么中学数学教材坚持以函数的主线的重要原因，因为函数是研究变量与常量关系的最基本载体和最重要的工具，函数思想是数学思想的核心内容之一，落实数学核心素养就要不断强化函数意识，学会用函数的思想观点理解和处理数学问题．无技巧是最好的技巧，正如李邦河院士所言：“数学从根本上是玩概念的，不是玩技巧，技巧不足道也”!

图形计算器在复合函数单调区间教学中的应用

苏汉杰[1]　田　雪[2]

1 首都师范大学附属中学通州校区（101100）　2 北京市通州区张家湾中学（101113）

复合函数是高中函数教学中比较难的内容之一，其高度抽象性使许多学生摸不清头脑，用传统的方法去讲解，效果不理想．我们应该认识到图象在解决函数单调性中是一个非常好的工具，这也是数形结合思想在函数中的应用．现在面临的问题是，学生识图能力特别差，画图能力更是有限，也没有用图象解决问题的意识，让学生自己画图象来解决这部分问题比较困难，因为复合函数的图象是不能用传统的方法画出来的．这时候，图形计算器开始走进我们的课堂教学，用图形计算器的画图功能来突破这一难题，可以收到很好的效果．图形计算器的图象功能使学生们能够更好、更轻松地认识复合函数，让学生先从图象上有一个感性认识，再由感性认识经过理性思考上升到理性认识，这也是符合学生的认知规律的．

实验目的 用图形计算器的画图功能来讲解使学生掌握复合函数单调性．

实验仪器 图形计算器

实验过程 我们先明确函数单调性的概念：对于定义域 I 的某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数；当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数．反映在图象上从左到右上升的是增函数，下降的是减函数．

（1）我们先用图形计算器画出 $y=x^2-2x-1$，$y=\sqrt{x}$ 的图象，如图 1，2，通过图象我们发现单调性和我们用定义证明得到的结果是一样的．

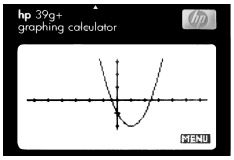

图 1

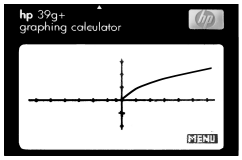

图 2

（2）我们来看指数型复合函数的单调区间，下面是复合函数 $y=2^{x^2}$，$y=(\frac{1}{2})^{x^2-2x}$，$y=2^{x^2-2x}$ 的图象，如图 3，4，5．

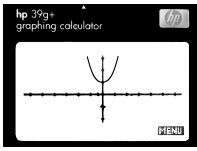

图 3

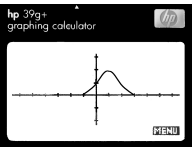

图 4

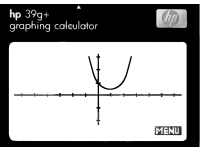

图 5

从图形中我们可以通过移动坐标来发现图形的单调区间．函数 $y=2^{x^2}$ 的单调减区间为 $(-\infty,0]$，单调增区间为 $[0,+\infty)$；函数 $y=(\frac{1}{2})^{x^2-2x}$ 的单调减区间为 $[1,+\infty)$，单调增区间为 $(-\infty,1]$；函数 $y=2^{x^2-2x}$ 的单调减区间为 $(-\infty,1]$，单调增区间为 $[1,+\infty)$．

由此我们发现：单调性与复合函数的内外层函数的单调性都有关系．由刚才的实验我们就发现复合函数如果在内外层函数某个公共区间上都是增的或都是减的，那么函数在该区间就是增的；如果内外层函数一个是增的一个是减的，那么函数在该区间就是减的，即“同增异减”．

有了这样猜测性的结论，做类似题就特别简

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net