

不要冗长要简约 不要奖金要精美

福建省福州华侨中学 李文明 (邮编:000000)

《中学数学教学》在每一期的封底都刊登有奖解题擂台,形式新颖,吸引了很多数学爱好者眼球,好的证明方法更是层出不穷,为初等数学的繁荣与普及做出积极贡献.当然笔者也被擂台上的数学问题所吸引,这是因为数学解题最重要的能够有效地训练人的数学思维能力,进而不断提高数学的核心素养.下面是笔者经过反复认真的思考与探究得到了擂台赛问题的一个简明的、具有普遍意义的、且有点颠覆传统的证明方法.

问题一 有奖解题擂台(109)

有奖解题擂台(109)

安徽师范大学数学计算机科学学院 郭要红 (邮编:241003)

题 在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} \csc \frac{A}{2} \csc \frac{B}{2} \csc \frac{C}{2} \leq 1.$$

等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时.

第一位正确解答题者将获得奖金 100 元.

摇题及解答请电邮至 guoyahong1108@163.com,解答时间以电邮时间为准.从 2017 年第一期开始,我们将连续刊载有奖解题擂台,欢迎广大读者踊跃提供摇题.

证明 不妨设 $\pi > A \geq B \geq C > 0 \Rightarrow \frac{3A}{2} \geq$

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{A}{2} \geq \frac{\pi}{6} \geq \frac{C}{2} > 0.$$

所以 $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{8}$
 $\csc \frac{A}{2} \csc \frac{B}{2} \csc \frac{C}{2} \leq 3 \tan \frac{A}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} \csc^3 \frac{A}{2}$ 恒成立,三角因此有

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} \csc \frac{A}{2} \csc \frac{B}{2} \csc \frac{C}{2} \leq (3 \tan \frac{A}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} \csc^3 \frac{A}{2})_{\min} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} \times (2)^3 = 0$$

当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时,“=”成立!

问题二 有奖解题擂台(110)

4 圆形

我们可以把圆形视为多边形的一种特例.设圆的半径为 r ,若圆的周长与面积相等,则有 $2\pi r = \pi r^2$,即 $r=2$.也就是说,当且仅当圆的半径为 2 时,圆的周长与面积相等.

把上面的问题进一步推广,还可以讨论一些立体图形中的相关问题.例如,对于立方体来说,如果它的表面积与它的体积相等,那么这个立方体的棱长一定都是 6.有兴趣的读者可以做出进一步的讨论.

参考文献

- 1 王青建.数学开心辞典(第二版)[M].北京:科学出版社,2014(1):177

(收稿日期:2018-06-08)

$$(2) \tan \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \tan \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}.$$

若 $\tan \frac{\pi}{n}$ 是正整数,则可以令 $\tan \frac{\pi}{n} = k$. 因为 $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan 0 = 0$, 而函数 $y = \tan x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 内是单调递增函数,所以当 $n \geq 5$ 时, $\tan \frac{\pi}{n} < 1$. 即 $\tan \frac{\pi}{n} = k$, 只有 $n=4(k=1)$ 这一个解,这恰是我们前面讨论过的正方形的情况.

若 $\tan \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}$ 或 $\tan \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}$, 则显然都没有正整数解.

这就说明,当正多边形的边数 $n \geq 5$ 时,周长与面积相等的正多边形是不存在的.

有奖解题擂台(110)

安徽师范大学数学计算科学学院

郭要红

(邮编:241003)

题 设 R, r 分别是 $\triangle ABC$ 中的外接圆半径, 内切圆半径, 则

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq \sqrt{\frac{16R}{r} - \frac{2r}{R} - 4}.$$

第一位正确解答者将获得奖金 100 元.

摘题及解答请电邮至 guoyahong1108@163.com, 解答时间以电邮时间为准. 从 2017 年

第一期开始, 我们将连续刊载有奖解题擂台, 欢迎广大读者踊跃提供摘题.

证明 不妨设 $\pi > A \geq B \geq C > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} >$

$$\frac{A}{2} \geq \frac{\pi}{6} \geq \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow 0 < \cot \frac{A}{2} \leq \cot \frac{B}{2} \leq \cot \frac{C}{2}$$

$$\frac{r}{R} \leq \cos C \Rightarrow (\cos C)_{\min} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因此 } \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} -$$

$$\sqrt{\frac{16R}{r} - \frac{2r}{R} - 4} \geq 3 \cot \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{16R}{r} - \frac{2r}{R} - 4}$$

恒成立, 因此

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{16R}{r} - \frac{2r}{R} - 4} \geq$$

$$(3 \cot \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{16R}{r} - \frac{2r}{R} - 4})_{\max} = 3 \times \sqrt{3} -$$

$$\sqrt{16 \times 2 - 1 - 4} = 0.$$

当且仅当 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 时, “=” 成立!

问题三 有奖解题擂台(114)

有奖解题擂台(114)

浙江大学应用数学系

万惠华

(邮编:310058)

题 设 a, b, c, x, y, z 为正数, 求证

$$\frac{b+c}{a(y+z)} + \frac{a+c}{b(x+z)} + \frac{a+b}{c(x+y)} \geq 3 \frac{a+b+c}{ax+by+cz}.$$

第一位正确解答者将获得奖金 100 元.

摘题提供与解答请电邮至 guoyahong1108@163.com, 解答认定时间以电子邮件时间为准. 欢迎广大读者踊跃提供摘题.

证明 不妨设 $a \geq b \geq c > 0, x \geq y \geq z > 0$

$$\text{于是 } \frac{b+c}{a(y+z)} + \frac{a+c}{b(x+z)} + \frac{b+a}{c(y+x)} - 3 \times$$

$$\frac{a+b+c}{ax+by+cz} \geq 3 \times \frac{2c}{a \cdot 2x} - 3 \times \frac{3a}{3cz} \text{ 恒成立,}$$

因此

$$\frac{b+c}{a(y+z)} + \frac{a+c}{b(x+z)} + \frac{b+a}{c(y+x)} - 3 \times$$

$$\frac{a+b+c}{ax+by+cz} \geq (3 \times \frac{2c}{a \cdot 2x} - 3 \times \frac{3a}{3cz})_{\max} = 0,$$

当且仅当 $a = b = c, x = y = z$ 时, “=” 成立!

问题四 有奖解题擂台(115)

有奖解题擂台(115)

安徽省淮南市

赵忠华

(邮编:242600)

题 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c, t_a, t_b, t_c 分别表示三角形边长和内角平分线长, R, r 表示三角形外接圆与内切圆半径, 则有

$$\frac{t_a^2}{b^2+c^2} + \frac{t_b^2}{c^2+a^2} + \frac{t_c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{9r}{4R}.$$

第一位正确解答者将获得奖金 100 元.

摘题提供与解答请电邮至 guoyahong1108@163.com, 解答认定时间以电子邮件时间为准. 欢迎广大读者踊跃提供摘题.

证明 不妨设 $a \geq b \geq c \Rightarrow t_a \leq t_b \leq t_c, 3A$

$$\geq A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A}{2} \geq \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } \frac{t_a}{a} = \frac{\sin B}{\sin \frac{A}{2}} \leq \frac{\sin B}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 \sin B \Rightarrow \frac{t_a}{a} \leq \sin B,$$

$$\text{则 } \frac{t_a^2}{b^2+c^2} + \frac{t_b^2}{c^2+a^2} + \frac{t_c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3t_a^2}{2a^2}$$

$$\text{恒成立, 因此 } \frac{t_a^2}{b^2+c^2} + \frac{t_b^2}{c^2+a^2} + \frac{t_c^2}{a^2+b^2} \geq$$

$$(\frac{3t_a^2}{2a^2})_{\max} = \frac{3}{2} \times \sin^2 B \geq \frac{3}{2} \times \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{9}{8} \geq \frac{9}{4} \cdot$$

$$\frac{r}{R}.$$

当且仅当 $a = b = c$ 时, “=” 成立!

问题五 有奖解题擂台(116)

有奖解题擂台(116)

天津水运高级技工学校

黄兆麟

(邮编:300456)

题 已知 a, b, c 为正实数, 用初等求差法证明

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

第一位正确解答者将获得奖金 100 元.

摘题提供与解答请电邮至 guoyahong1108@163.com, 解答认定时间以电子邮件时间为准. 欢迎广大读者踊跃提供摘题.

证明 不妨设 $a \geq b \geq c > 0$, 则

$$a^3b + b^3c + c^3a - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq$$

$$3(c^4 - a^4) \text{ 恒成立, 因此}$$

$$a^3b + b^3c + c^3a - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq$$

$$[3(c^4 - a^4)]_{\max} = 0.$$

当且仅当 $a = b = c$ 时, “=” 成立

一个好的数学方法, 不仅仅能够解决某个具体问题, 还能够解决一类问题, 本质上讲我们没有利用任何著名的不等式定理, 仅仅是根据实数的有序性公理, 恰当的放的同时再恰当的缩, 回归数学的本真, 大道至简, 至简大美! 数学的魅力是无穷的, 关键是要用心去思考, 用心去挖掘, 用心去感受! 其实此种方法可以解决众多的国内国际数学奥林匹克不等式问题, 这将为数学的普及开创全新的局面!

(收稿日期: 2018-06-20)