

基于数学核心素养导向下的课堂教学方式

——谈谈变式教学对学生数学运算及推理探究能力的培养

●福建省福州华侨中学 覃光勋

●湖北省武汉市第49中学 周 镜

在数学的课堂教学中,学生往往埋没于数学的题海、教师的讲解之中.教师讲得多,学生做得多,久而久之,学生逐渐失去学习的兴趣,丧失发现问题、提出问题、解决问题的能力,仅仅成为解题的机器,从而缺乏探究能力.利用变式方法采用一题多解、一题多变的课堂数学探究形式,引导学生积极探索,不但能提高学生的学习兴趣,而且对于提高学生的运算能力、优化解题思路、增强逻辑推理能力都有很大的好处.本文就抛物线一节作如下说明.

一、变式教学,揭示基本性质

例1 斜率为1的直线经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,与抛物线相交于A、B两点,求线段AB的长.

学生容易给出解答:由题意,可求出直线方程,与抛物线方程联立,可求出A、B两点的坐标,利用两点间的距离公式,求出线段AB的长为8.

教师给出下列变式,进一步揭示直线与圆锥曲线的关系:

变式一:若直线AB的斜率为 k ,则线段AB的长为多少?(揭示弦长公式,求弦长的实质是根与系数的关系的应用)

变式二:若过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点的直线交抛物线于A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2)两点,求证: $|AB|=x_1+x_2+p$;

变式三:倾斜角为 θ 的直线过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点且交抛物线于A、B两点,求证: $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}$;

变式四:例1中,若弦长 $|AB|=8$,求直线的斜率 k ;

变式五:例1中,若弦长 $|AB|$ 不超过8,求直线倾斜角 θ 的取值范围.

通过以上变式教学,对问题进行迁移,学生不仅全面掌握与圆锥曲线弦长有关问题的解法,而且增强了学生的创新意识和应变能力.

二、变式教学,抓住本质特征

例2 已知抛物线 $y=x^2$,动弦AB的长为2,求AB中点纵坐标的最小值.

解:设A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2),AB的中点为M(x, y),抛物线焦点F($0, \frac{1}{4}$),准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$.

如图1,过点A、B、M分别作准线 $y=-\frac{1}{4}$ 的垂线,垂足分别为A₁、B₁、M₁,则 $2|MM_1|=|AA_1|+|BB_1|$.

因为 $|MM_1|=y+\frac{1}{4}$, $|AA_1|=$

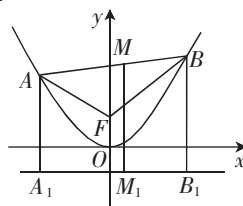


图1

$|AF|$, $|BB_1|=|BF|$,所以 $2(y+\frac{1}{4})=|AF|+|BF|$.

因为 $|AF|+|BF|\geq|AB|=2$, (当且仅当AB过点F时, $|AF|+|BF|=2$) 所以 $2(y+\frac{1}{4})\geq 2$, 即 $y\geq \frac{3}{4}$, 所以点M纵坐标的最小值为 $\frac{3}{4}$.

这道题利用数形结合的思想,充分应用抛物线的定义,解答过程简洁明快,似乎问题已得到完美解决.但将问题作如下改变呢?

变式:例2中的动弦AB的长为 $\frac{1}{2}$,求AB中点纵坐标的最小值.

分析:乍一看,似乎和例2类似.实际上,抛物线 $y=x^2$ 的通径长为1,而通径为抛物线过焦点的弦中弦长最短的.动弦的长为 $\frac{1}{2}$,显然,动弦AB不可能过抛物线的焦点,即等号不能取得,当然也就不能再用例2的解法了.

解:设直线AB的方程为 $y=kx+b$,

设A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2),AB的中点为M(x, y).

由 $\begin{cases} y=kx+b, \\ y=x^2, \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-kx-b=0$, ①

则 x_1, x_2 为方程①的两实根,

所以 $\begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{2}, \\ y=kx+b, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} k=2x, \\ b=y-2x^2. \end{cases}$ ②

因为 $|AB|=\frac{1}{2}$, 所以 $\sqrt{(1+k^2)(k^2+4b)}=\frac{1}{2}$, 即 $(1+k^2)\cdot$



$$(k^2+4b)=\frac{1}{4}. \quad ③$$

$$\text{将②代入③得}(1+4x^2)(4x^2+4y-8x^2)=\frac{1}{4},$$

$$\text{所以}4y=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+4x^2}+4x^2=\frac{1}{4}(4+16x^2)+\frac{1}{4+16x^2}-1.$$

$$\text{令}u=4+16x^2(u\geq 4),$$

$$\text{则}4y=\frac{1}{4}u+\frac{1}{u}-1\text{在}[4,+\infty)\text{上单调递增.}$$

$$\text{所以当}u=4\text{时},y_{\min}=\frac{1}{16}.$$

显然,例2也可用此法解答.通过变式教学,让学生从“变”中发现“不变”的本质,从“不变”中探索“变”的规律,从而优化学生的思维品质,培养学生发现问题和解决问题的能力与素养.

三、变式教学,发散学生思维

例3 已知 M 为抛物线 $x=y^2$ 上的动点,定点 $A(1,0)$,求 $|MA|$ 的最小值.

解:设 $M(x,y)(x\geq 0)$,

$$\text{则}|MA|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

$$\text{所以当}x=\frac{1}{2}\text{时},|MA|_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

变式一: M 为抛物线 $y^2=4ax(a>0)$ 上的动点,当 M 到 $A(1,0)$ 的距离 $|MA|$ 最小时, M 的位置为 M_0 ,若 $|M_0A|<1$,求 a 的取值范围.

解:设 $M(x,y)(x\geq 0)$,

$$\begin{aligned}|MA|^2 &= (x-1)^2+y^2 = (x-1)^2+4ax = x^2+(4a-2)x+1 \\ &= [x+(2a-1)]^2+4a-4a^2(x\geq 0).\end{aligned}$$

$$(1)\text{若}2a-1\geq 0,\text{即}a\geq \frac{1}{2},\text{则当}x=0\text{时},|MA|^2_{\min}=1.$$

$$(2)\text{若}2a-1<0,\text{即}0<a<\frac{1}{2},\text{则当}x=1-2a\text{时},|MA|^2_{\min}=4a-4a^2,$$

$$\text{则}|M_0A|=\sqrt{4a-4a^2}<1,\text{所以}0<a<\frac{1}{2}.$$

变式二:在一轴截面为抛物线型的酒杯中,放入一半径为 r 的玻璃球,抛物线的方程设为 $x^2=2py(p>0)$,当 r 在什么范围内时,玻璃球会触及到酒杯底部?

解法一:因为圆心在 y 轴的正半轴上,所以设圆的方程为 $x^2+(y-r)^2=r^2$.

$$\text{由}\begin{cases}x^2=2py, \\ x^2+(y-r)^2=r^2,\end{cases}\text{消去}x\text{得}y^2-2ry+2py=0,$$

$$\text{则}y_1=0\text{或}y_2=2r-2p.$$

由题意,圆与抛物线有且只有一个交点,且交点为原点.

$$\text{所以}2r-2p\leq 0.\text{所以}0<r\leq p.$$

解法二:由题意知圆心 $C(0,r)$,

则 C 与抛物线上的点的距离的最小时,抛物线上的点为原点.

设 $M(x,y)$ 为抛物线上任意一点,则

$$\begin{aligned}|MC|^2 &= (x-0)^2+(y-r)^2 = x^2+(y-r)^2 = y^2-2ry+2py+r^2 \\ &= [y-(r-p)]^2-(r-p)^2+r^2(y\geq 0).\end{aligned}$$

$$(1)\text{若}r-p\leq 0,\text{即}0<r\leq p,\text{则当}y=0\text{时},|MC|^2_{\min}=r^2.$$

$$(2)\text{若}r-p>0,\text{即}r>p,\text{则当}y=r-p\text{时},|MC|^2_{\min}=2pr-p^2.$$

$$\text{令}2pr-p^2=r^2,\text{所以}r=p(\text{舍去}).$$

$$\text{所以}0<r\leq p.$$

变式一也可用解法一来求解,视作圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 与抛物线 $y^2=4ax$ 有且只有一个交点,且交点为原点.

$$\text{由}\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1, \\ y^2=4ax,\end{cases}\text{消去}y\text{得}x^2-2x+4ax=0,$$

$$\text{则}x_1=0\text{或}x_2=2-4a,$$

$$\text{所以}2-4a>0.\text{所以}0<a<\frac{1}{2}.$$

例3也可用此法.这种变式教学,逐步加大难度,分散难点,注重运算过程,让学生感受到成功的喜悦,加强学生学习的信心,提高学生学习的兴趣,同时也培养学生严密的数学思维.

在重视基础知识、基本能力的同时,恰当地进行变式教学、变式练习,优化课堂教学,多角度思考问题,是一种再创造性的学习过程,是培养学生运算能力、推理探究能力和实施研究性学习的重要途径.

总之,数学的魅力就在于“变”,有“变”才有“活”,在这当中,设计适当的变式,可以给学生提供一座桥,让学生在已知的水平和未知的水平之间自然过渡,这里的最近发展区要把握好.“变式”能避免学生反复的练习同一题型,避免学生在低层次之间反复的重复,从而使学生的思维能力得到更宽、更广、更深的培养,使学生的数学核心素养得到有效的渗透.

参考文献:

- [1] 杨九詮.学生发展核心素养三十人谈[M].上海:华东师范大学出版社,2017.
- [2] 李秋明.高中数学有效课堂教学方略[M].上海:同济大学出版社,2018.
- [3] 张俤霖.高中数学解题策略[M].上海:上海大学出版社,2018.
- [4] 印秋平.变式教学是提升学生思维能力的有效途径[J].数学学习与研究,2010(5).