

中学生标准学术能力诊断性测试 2020 年 9 月测试

理科数学试卷

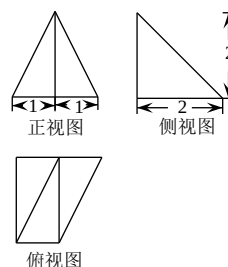
本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。



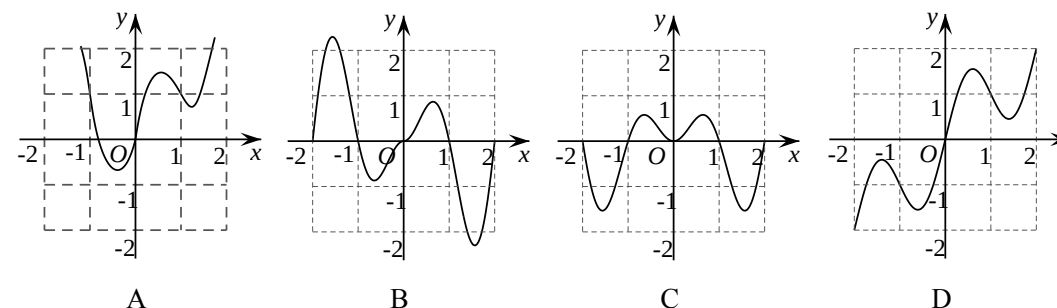
扫码查成绩

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

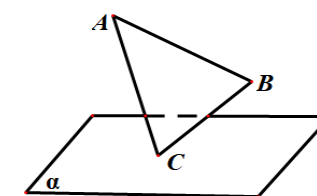
- 已知全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{x | x \leq 1, x \in \mathbf{N}\}$, $B = \{1, 3\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$
A. $\{4\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{-1, 2, 4\}$ D. $\{-1, 0, 2, 4\}$
- 设 $z = \frac{i}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z|$ 等于
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$
- 已知 $a = \log_2 48$, $2^b = \frac{2}{3}$, 则 $a+b =$
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
- 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 已知 $m \subset \alpha, n \subset \alpha$, 则 “ $m // \beta, n // \beta$ ” 是 “ $\alpha // \beta$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的值为
A. $\frac{5}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{5}{9}$
- 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是 (单位: cm^3)
A. 2 B. 4 C. 6 D. 12



7. 函数 $f(x) = x + \sin(\pi x)$ 的图象是



- 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是单位向量, 其夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 若 $|\vec{m}\vec{e}_1 + \vec{n}\vec{e}_2| = \sqrt{2} (m, n \in \mathbf{R})$, 则 $m+2n$ 的最大值为
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$
- 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $C \in$ 平面 α , 点 A, B 在平面 α 的同一侧, 且 $|AC| = 2\sqrt{3}, |BC| = 2$. 若 AC, BC 与平面 α 所成的角分别为 $\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是
A. $[\sqrt{6}, 3]$ B. $[\sqrt{3}, 3]$
C. $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ D. $[\sqrt{6}, 2\sqrt{3}]$



(第 9 题图)

- 已知点 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的右焦点, 直线 $y = kx, k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$ 与双曲线 C 交于 A, B 两点, 若 $AF \perp BF$, 则该双曲线的离心率的取值范围是
A. $[\sqrt{2}, \sqrt{3}+1]$ B. $[\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{6}]$ C. $[2, \sqrt{3}+1]$ D. $[2, \sqrt{2}+\sqrt{6}]$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} f(x+10), & -9 < x \leq 1 \\ |\lg(x-1)|, & 1 < x \leq 11 \end{cases}$, 若有四个不同的实数 x_1, x_2, x_3, x_4 满足方程 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则以下结论不一定正确的是
A. $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ B. $x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_4$
C. $(x_1 + 9)(x_2 + 9) = (x_3 - 1)(x_4 - 1)$ D. $(x_1 + 10) \cdot x_4 = (x_2 + 10) \cdot x_3$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 0, a_{n+1} = \ln(e^{a_n} + 1) - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 前 n 项和为 S_n (参考数据: $\ln 2 \approx 0.693, \ln 3 \approx 1.099$), 则下列选项错误的是

- A. $\{a_{2n-1}\}$ 是单调递增数列, $\{a_{2n}\}$ 是单调递减数列
- B. $a_n + a_{n+1} \leq \ln 3$
- C. $S_{2020} < 670$
- D. $a_{2n-1} \leq a_{2n}$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 如右图所示的程序框图的输出值 $y \in (1, 3)$, 则输入值 $x \in$ _____.

14. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 若

$$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}, \text{ 则点 } A \text{ 的坐标为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 小红同学去超市买糖果, 现有四种不同口味的糖果可供选择 (可以有糖果不被选择), 单价均为一元一颗, 小红只有 7 元钱且要求全部花完, 则不同的选购方法共有 _____ 种.

16. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且满足 $4x + y + 2xy + 1 = 0$, 则 $x^2 + y^2 + x + 4y$ 的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $c = 2, \angle C = \frac{\pi}{3}$.

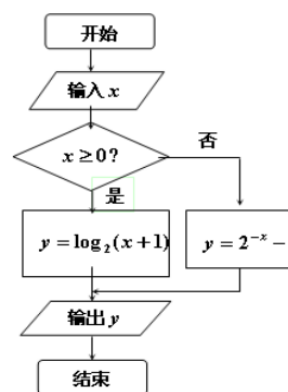
(1) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 a, b 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $a + b$ 的取值范围.

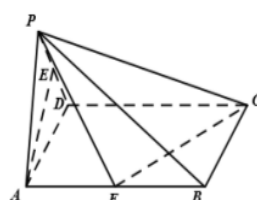
18. (12 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = PD = AD = 2$, 点 E, F 分别为 PD, AB 的中点.

(1) 求证: $AE \parallel$ 平面 PFC ;

(2) 若 CF 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$, 求 AB 的长.



(第 13 题图)



(第 18 题图)

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 $a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1} - \frac{3n}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n > 1 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求满足 $2S_n - 3n^2 + 5n > 0$ 的所有正整数 n 的值.

20. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $P\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 设 A, B 是椭圆 C 上的

两个不同的动点, 且直线 PA, PB 的倾斜角互补.

(1) 求证: 直线 AB 的斜率为定值;

(2) 求 $\triangle PAB$ 的面积 S 的最大值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = ae^x + b (a, b \in \mathbf{R})$, 且 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) \ln x + \frac{3}{x} > \frac{5}{2}$ 成立.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. (10 分) [选修 4—4: 极坐标与参数方程]

在极坐标系中, 极点为 O . 曲线 $C: \rho = 13$, 过点 $A(5, 0)$ 作两条互相垂直的直线与 C 分别交于点 P, Q 和 M, N .

(1) 当 $\frac{|PQ|}{|MN|} + \frac{|MN|}{|PQ|} = 2$ 时, 求直线 PQ 的极坐标方程;

(2) 求 $\frac{|PQ|}{|MN|} + \frac{|MN|}{2|PQ|}$ 的最大值和最小值.

23. (10 分) [选修 4—5: 不等式选讲]

(1) 已知 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 且 $a + 2b = 3$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}$ 的最小值;

(2) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 1$, 求 $\frac{4}{2x^2 + x} + \frac{9}{y^2 + y}$ 的最小值.