

中学生标准学术能力诊断性测试 2020 年 9 月测试

文科数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。



扫码查成绩

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{x | x \geq -2\}$, 集合 $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$

- A. $\{x | -1 \leq x \leq 0\}$ B. $\{x | -2 \leq x \leq -1\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ D. $\{x | -2 \leq x < 0\}$

2. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点坐标为

- A. $(\pm\sqrt{2}, 0)$ B. $(\pm 2, 0)$ C. $(0, \pm\sqrt{2})$ D. $(0, \pm 2)$

3. 设 $z = \frac{i}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z|$ 等于

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

4. 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题是真命题的是

- A. 若 $m // \alpha, m // \beta$, 则 $\alpha // \beta$ B. 若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$
C. 若 m, n 与 α 所成角的大小相等, 则 $m // n$ D. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m // n$

5. 已知公比为 q , 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 0$, 则 “ $a_5 > a_3$ ” 是 “ $q > 1$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

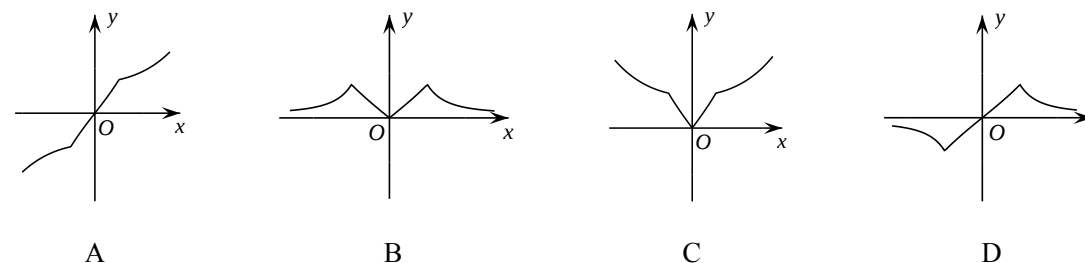
6. 要从已编号 (1~85) 的 85 只灯泡中随机抽取 5 只来试验灯泡的使用寿命, 用每部分选取的号码间隔一样的系统抽样方法确定所选取的 5 只灯泡的编号可能是

- A. 1, 2, 3, 4, 5 B. 4, 20, 36, 52, 68 C. 5, 23, 41, 59, 77 D. 3, 20, 37, 54, 71

7. 已知 $a = \log_3 6, b = \log_2 9, c = \log_5 10$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

8. 函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{|x+1| + |x-1|}$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象大致是



9. 将函数 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上的各点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 并保持纵坐标不变, 得到函数 $h(x)$ 的图象, 若 $h(x_1)h(x_2) = -4$, 其中 $x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最大值是

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{5}{4}\pi$ D. $\frac{3}{2}\pi$

10. 设直线 $l: y = kx + t$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 A, B 两点, 点 M 是线段 AB 的中点, O 为坐标原点, 设直线 OM 的斜率为 k' , 满足 $k \cdot k' > -\frac{1}{2}$, 则该椭圆的离心率的取值范围是

- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

11. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 在 $(0, 2)$ 上有两个不同的零点, 则 $3a + b$ 的取值范围是

- A. $(-4, 0)$ B. $(-12, 0)$ C. $(-8, 0)$ D. $(-4, 4)$

12. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 侧棱 $AA_1 = t (t > 4)$, 点 E 是 BC 的中点, 点 P 是侧面 ABB_1A_1 内的动点 (包括四条边上的点), 且满足 $\tan \angle APD = 4 \tan \angle EPB$, 则四棱锥 $P - ABED$ 体积的最大值是

- A. 32 B. $\frac{32}{3}$ C. $16\sqrt{3}$ D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

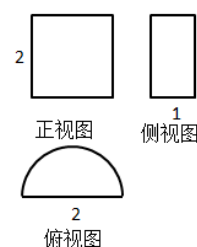
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 一个几何体的三视图如右图所示，则该几何体的表面积为_____.

14. 设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})=0$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是_____.

15. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, D 为斜边 AB 上一点, 且 $AD=2DB, AB=12, CD=6$, 则 $\sin \angle ACD=$ _____.

16. 已知实数 x, y 满足 $x^2 - 4xy - 5y^2 = 5$, 则 $x^2 + 2y^2$ 的最小值为_____.



(第 13 题图)

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每道试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分) 由于新冠病毒的影响，学生迟迟不能返校上课，为了解某校高三学生及其家长对于高考是否需要延期的看法，该校选择了高三学生和

态度 调查人群	应该延期	不该延期	无所谓
高三学生	300 人	x 人	z 人
学生家长	100 人	y 人	80 人

家长共 900 人进行调查，就“高考是否需要延期”问题进行了问卷调查统计，结果如上表所示：

而且已知在全体样本中随机抽取 1 人，抽到持“无所谓”态度的人的概率为 $\frac{2}{9}$.

(1) 现用分层抽样的方法在所有参与调查的人中抽取 150 人进行电话交流，问应在持“不该延期”态度的人中抽取多少人？

(2) 在持“无所谓”态度的人中，用分层抽样的方法抽取 10 人，在这 10 人中再随机抽取 3 人进行视频会议，求这 3 人中家长人数分别为 0, 1, 2, 3 的概率.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_2=3, a_5=9$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $S_n + b_n = 1$, 其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = a_n + b_n$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < n^2 + 1$.

19. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AD \parallel BC, \angle BCD = 90^\circ, \angle PDC = \angle PDA = 60^\circ$,

$2CD = 2AD = PD = BC, E, F$ 分别是 PD, BC 的中点.

(1) 求证: $PF \parallel$ 平面 AEC ;

(2) 求 PF 与平面 PDC 所成角的正弦值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + a \ln x$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 对任意 $t \geq 1$, 恒有 $f(2t-1) \geq 2f(t) - 3$, 求 a 的取值范围.

21. (12 分) 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 直线 $l: y = -\frac{1}{2}x + b$ 与抛物线交于 A, B 两点.

(1) 若以 AB 为直径的圆过抛物线的焦点，求直线 l 的方程;

(2) 若直线 l 与 y 轴负半轴相交，设抛物线的准线与 x 轴的交点为 M , 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. (10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

已知圆 O 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \theta \\ y = 1 + t \sin \theta \end{cases}$

(t 为参数, $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 - t \sin \theta \\ y = 1 + t \cos \theta \end{cases}$ (t 为参数, $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$).

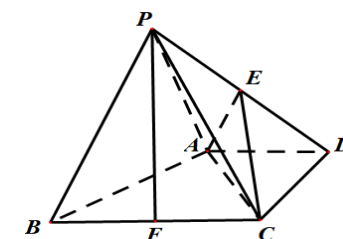
(1) 已知 $P(-\sqrt{3}, 1)$, 以直角坐标原点 O 为极点，以 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，过点 P 作圆 O 的切线，求该切线的极坐标方程;

(2) 直线 l_1 与圆 O 相交于 A, B 两点，直线 l_2 与圆 O 相交于 C, D 两点，求 $|AB| \cdot |CD|$ 的最值.

23. (10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知非负实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 2$.

(1) 求证: $\frac{xyz}{xy + yz + xz} \leq \frac{2}{9}$; (2) 求 $t = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{9+y^2} + \sqrt{25+z^2}$ 的最小值.



(第 19 题图)