不要冗长要简约　不要面纱要秒杀

福建省福州华侨中学 (350004)　李文明

《普通高中数学课程标准 (2017 年版)》指出, 数学学科的核心素养包括: 数学抽象、数学推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析, 这些数学学科的核心素养既相对独立又相互交融, 是一个有机的整体. 正因如此, 作为选拔和发现具有数学潜能学生的中学数学竞赛不仅要考查学生数学核心素养方面是否有突出的表现, 更要考查学生的数学思维品质和创新能力, 因此, 对中学数学竞赛试题认真研究, 创新思考, 不仅对中学数学教学十分有益, 而且更有利于培养学生的数学创新能力. 下面我们对几道数学竞赛题进行认真探索, 创新思考.

一、四个案例

题目 1 (2018 年第六届 "学数学" 奥林匹克邀请赛 (秋季) 第一试第 10 题) 设 λ 为实数, 已知对任意的非负实数 a,b,c, 都有 $M\leqslant\lambda\left(a^2+b^2+c^2\right)$ 成立, 其中 $M=\sqrt{b^2-bc+c^2}\cdot\sqrt{c^2-ca+a^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{a^2-ab+b^2}\cdot\sqrt{b^2-bc+c^2}$. 试求实数 λ 的最小值.

解答 取 $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2},c=0$, 可得 $\lambda\geqslant\dfrac{3}{2}$.

以下证明: $M\leqslant\dfrac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

法一 首先证明如下引理.

引理 若 $a,b\geqslant0$, 则 $ab+(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2}\leqslant\dfrac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)$.

引理的证明 引理等价于

$$
\begin{aligned}
&(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2}\leqslant\frac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)-ab\\
\Leftrightarrow\ &4(a+b)^2\left(a^2-ab+b^2\right)\leqslant\left(3\left(a^2+b^2\right)-2ab\right)^2\\
\Leftrightarrow\ &4(a+b)\left(a^3+b^3\right)\leqslant9\left(a^2+b^2\right)^2-12\left(a^2+b^2\right)ab+4a^2b^2\\
\Leftrightarrow\ &4\left(a^4+b^4+ab^3+a^3b\right)\leqslant9\left(a^4+b^4+2a^2b^2\right)\\
&-12\left(a^3b+ab^3\right)+4a^2b^2\\
\Leftrightarrow\ &5a^4-16a^3b+22a^2b^2-16a^3b+5b^4\geqslant0\\
\Leftrightarrow\ &(a-b)^2\left(5a^2-6ab+5b^2\right)\geqslant0
\end{aligned}
$$

最后一式显然成立, 从而, 引理得证.

回到原题.

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$, 则 $ca\geqslant c^2,bc\geqslant c^2$, 于是 $M\leqslant ba+a\sqrt{a^2-ab+b^2}+b\sqrt{a^2-ab+b^2}=ab+(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2}\leqslant\dfrac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)\leqslant\dfrac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

法二 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$, 则 $ca\geqslant c^2,bc\geqslant c^2$, 于是 $M\leqslant ba+a\sqrt{a^2-ab+b^2}+b\sqrt{a^2-ab+b^2}$. 若 $b=0$, 则 $c=0$, 结论显然成立. 若 $b>0$, 考虑 $S=\dfrac{(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2}+ab}{a^2+b^2}$ $(a\geqslant b>0)$. 不妨设 $a^2+b^2=1$, 并设 $t=a+b$, 则易知 $1<t\leqslant\sqrt{2},ab=\dfrac{1}{2}\left((a+b)^2-\left(a^2+b^2\right)\right)=\dfrac{1}{2}\left(t^2-1\right)$. 从而, $S=t\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\left(t^2-1\right)}+\dfrac{1}{2}\left(t^2-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(t\sqrt{6-2t^2}+t^2\right)-\dfrac{1}{2}$. 令 $g(t)=t\sqrt{6-2t^2}+t^2\ (t\in(1,\sqrt{2}])$, 则 $g'(t)=\sqrt{6-2t^2}+t\cdot\dfrac{-4t}{2\sqrt{6-2t^2}}+2t=\dfrac{6-4t^2+2t\sqrt{6-2t^2}}{\sqrt{6-2t^2}}$.

下面证明, 当 $t\in(1,\sqrt{2}]$ 时, 有

$$6-4t^2+2t\sqrt{6-2t^2}>0 \qquad ①$$

当 $t\in\left(1,\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ 时, 有 $6-4t^2\geqslant0,2t\sqrt{6-2t^2}>0$, ① 成立.

当 $t\in\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{2}\right]$ 时, 有 $\dfrac{3}{2}<t^2<2$, 注意到①等价于

$$
\begin{aligned}
&t\sqrt{6-2t^2}>2t^2-3\Leftrightarrow t^2\left(6-2t^2\right)>4t^4-12t^2+9\\
\Leftrightarrow\ &6t^4-18t^2+9<0\Leftrightarrow2t^4-6t^2+3<0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{3-\sqrt{3}}{2}<t^2<\frac{3+\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

因此, 当 $t\in\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{2}\right]$ 时, 式① 也成立. 从而, $g'(t)>0$, 即 $g(t)$ 在 $(1,\sqrt{2}]$ 上单调递增. 故 $g(t)$ 在 $t=\sqrt{2}$ 时取到最大值 $g(\sqrt{2})=4$. 进而, S 在 $t=\sqrt{2}$ 时取到最大值 $\dfrac{3}{2}$, 即 $S\leqslant\dfrac{3}{2}$. 因此, $(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2}+ab\leqslant\dfrac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)$, 故

$$
\begin{aligned}
M&\leqslant(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2}+ab\\
&\leqslant\frac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)\leqslant\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).
\end{aligned}
$$

题目 1 的点评 第 10 题参考答案证法一, 是先取特殊值, 进而得到 λ 的特殊值, 然后证明引理, 再用引理证明最后结论, 方法一虽然看上去比较简明, 但是特殊值的选取比较神秘, 甚至有点莫名其妙;

证法二是先放缩, 再运用换元法, 再构造函数, 再分类讨论, 再利用导数解决问题, 过程冗长复杂

题目 1 的新证明 下面我们从问题的本质出发, 根据题目的所给条件与结论的结构特征, 给出简约自然、具有普适性的创新证明如下:

首先由于 $a,b,c\geqslant0$, 所以当 $a=b=c=0$ 时, $\lambda\in\mathbb{R}$ 原不等式恒成立. 当 a,b,c 不全为 0 时, 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant0$,

则原不等式

$$M \leqslant \lambda\left(a^2+b^2+c^2\right) \Leftrightarrow \lambda \geqslant \frac{M}{a^2+b^2+c^2}$$

恒成立, 因此 $\lambda \geqslant \left(\frac{M}{a^2+b^2+c^2}\right)_{\max}$. 下面我们求 $\frac{M}{a^2+b^2+c^2}$ 的最大值. 由于

$$\frac{M}{a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{M}{a^2+b^2}$$

恒成立, 当且仅当 $c=0$ 时 "=" 成立. 当 $c=0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{M}{a^2+b^2} &= \frac{ab+(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a^2+b^2} \\ &\leqslant \frac{a^2+2a\cdot\sqrt{2a^2-b^2}}{2b^2}\end{aligned}$$

恒成立, 因此

$$\frac{M}{a^2+b^2} \leqslant \left[\frac{a^2+2a\sqrt{2a^2-b^2}}{2b^2}\right]_{\min} = \frac{3}{2},$$

当且仅当 $a=b$ 时, "=" 成立. 综上 $\frac{M}{a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{3}{2}$, 当且仅当 $a=b>0$, 且 $c=0$ 时 "=" 成立即

$$\left(\frac{M}{a^2+b^2+c^2}\right)_{\max} = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad \lambda \geqslant \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad \lambda_{\min} = \frac{3}{2}.$$

由此我们就可以知道其实特殊值的选取并不唯一, 例如我们可以选择更加简单的特殊值 $a=b=1, c=0 \Rightarrow \lambda \geqslant \frac{3}{2}$, 也就是说只要 $a=b>0$ 且 $c=0$ 都是可以的! ! 甚至是我们根本就不用选取特殊值进行试探, 而是分析透彻, 认清本质, 一气呵成, 至此神秘面纱荡然无存!

题目 2 (2018 年第六届 "学数学" 奥林匹克邀请赛 (秋季) 第二试第二题) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 正整数数列 $\{x_n\}$ 满足 $1=x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i}\right) - \frac{1}{2}.$$

解答 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1} &= \frac{\sqrt{x_1-1}}{x_1} \\ &= \sqrt{-\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \leqslant \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

结论成立. 假设当 $n=k$ 时, 结论成立. 即

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k^2} \frac{1}{i}\right) - \frac{1}{2}.$$

下面证明, 当 $n=k+1$ 时, 结论也成立. 若 $x_{k+1} > (k+1)^2$, 则由归纳假设得

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k^2} \frac{1}{i}\right) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x_{k+1}-x_k}}{x_{k+1}} \qquad ①$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x_{k+1}-x_k}}{x_{k+1}} &\leqslant \frac{\sqrt{x_{k+1}-1}}{x_{k+1}} = \sqrt{\frac{1}{x_{k+1}}-\left(\frac{1}{x_{k+1}}\right)^2} \\ &< \sqrt{\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^4}} = \frac{\sqrt{k^2+2k}}{(k+1)^2} \\ &< \frac{k+1}{(k+1)^2} < \sum_{i=k^2+1}^{(k+1)^2} \frac{1}{i},\end{aligned}$$

代入式① 即得

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{(k+1)^2} \frac{1}{i}\right) - \frac{1}{2}.$$

此时结论成立. 若 $x_{k+1} \leqslant (k+1)^2$, 由 $1=x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k \leqslant x_{k+1}$, 知对所有 $i=1,2,\cdots,k+1$, x_i-x_{i-1} 都是非负整数, 故 $x_{i+1}-x_i \geqslant \sqrt{x_{i+1}-x_i}$. 从而,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i} \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} \frac{x_i-x_{i-1}}{x_i} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{x_0+1}+\frac{1}{x_0+2}+\cdots+\frac{1}{x_1}\right)+\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_1+2}+\cdots+\frac{1}{x_2}\right) \\ &\quad+\cdots+\left(\frac{1}{x_k+1}+\frac{1}{x_k+2}+\cdots+\frac{1}{x_{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x_{k+1}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{(k+1)^2} \frac{1}{i}\right) - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

此时结论也成立. 综上所述, 结论对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立.

题目 2 的点评 原证明方法采用了数学归纳法和分类讨论, 这种解法虽然是与自然数相关的命题证明的常用方法, 但是过程冗长繁难, 技巧性很强, 学生难以把控.

题目 2 的新证明 下面我们认真分析问题的本质特征, 创新思考, 给出自然的、简约的具有普适性的创新证明.

由已知得 $\sqrt{x_i-x_{i-1}} \leqslant x_i-x_{i-1}, i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i} - \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1} + \frac{(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})}{x_0} \\ &\quad - \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x_1-x_0}}{x_1} + x_n - x_1 - \frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{2} \\ &\leqslant \sqrt{-\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} + (x_n-x_1) - 1 + \frac{1}{2} \leqslant x_n - x_1\end{aligned}$$

恒成立, 因此

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i} - \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \leqslant (x_n-x_1)_{\min} = 0,$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i} \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i}\right) - \frac{1}{2}$.

题目 3 (2018 年全国高中数学联合竞赛加试 A 卷第一题) 设 n 是正整数, $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n,A,B$ 均为正实数, 满足 $a_i\leqslant b_i$, $a_i\leqslant A$, $i=1,2,\cdots,n$ 且 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{B}{A}$. 证明:

$$\frac{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}\leqslant\frac{B+1}{A+1}.$$

证明 由条件知, $k_i=\dfrac{b_i}{a_i}\geqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$. 记 $\dfrac{B}{A}=K$, 则 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{B}{A}$ 化为 $k_1k_2\cdots k_n\leqslant K$. 要证明

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{k_ia_i+1}{a_i+1}\leqslant\frac{KA+1}{A+1} \quad ①$$

对 $i=1,2,\cdots,n$, 由于 $k_i\geqslant 1$ 及 $0<a_i\leqslant A$ 知,

$$\frac{k_ia_i+1}{a_i+1}=k_i-\frac{k_i-1}{a_i+1}\leqslant k_i-\frac{k_i-1}{A+1}=\frac{k_iA+1}{A+1}.$$

结合 $K\geqslant k_1k_2\cdots k_n$ 知, 为证明①, 仅需证明当 $A>0$, $k_i\geqslant 1\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时, 有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{k_iA+1}{A+1}\leqslant\frac{k_1k_2\cdots k_nA+1}{A+1} \quad ②$$

对 n 进行归纳, 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 当 $n=2$ 时, 由 $A>0,k_1,k_2\geqslant 1$ 可知

$$\frac{k_1A+1}{A+1}\cdot\frac{k_2A+1}{A+1}-\frac{k_1k_2A+1}{A+1}=-\frac{A(k_1-1)(k_2-1)}{(A+1)^2}\leqslant 0 \quad ③$$

因此 $n=2$ 时结论成立. 设 $n=m$ 时结论成立, 则当 $n=m+1$ 时, 利用归纳假设知,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{m+1}\frac{k_iA+1}{A+1}&=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{k_iA+1}{A+1}\right)\cdot\frac{k_{m+1}A+1}{A+1}\\&\leqslant\frac{k_1k_2\cdots k_mA+1}{A+1}\cdot\frac{k_{m-1}A+1}{A+1}\\&\leqslant\frac{k_1k_2\cdots k_{m+1}A+1}{A+1},\end{aligned}$$

最后一步是在③中用 $k_1k_2\cdots k_m,k_{m+1}$ (注意 $k_1k_2\cdots k_m\geqslant 1$, $k_{m+1}\geqslant 1$) 分别代替 k_1,k_2, 从而 $n=m+1$ 时结论成立. 由数学归纳法可知, ② 对所有正整数 n 成立, 故命题得证.

题目 3 的点评 参考答案与评分标准采用数学归纳法进行证明, 过程冗长, 技巧性很强, 无形之中增加了问题的难度!

题目 3 的新证明 不妨设 $A\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$, 由于

$$\begin{aligned}&\frac{b_i}{a_i}\geqslant 1,(i\in\mathbb{N}^*)\\\Rightarrow\ &\frac{B}{A}\geqslant\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\cdots\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\geqslant 1\\\Rightarrow\ &B\geqslant A\Rightarrow B+1\geqslant A+1\Rightarrow\frac{B+1}{A+1}\geqslant 1\end{aligned}$$

又因为

$$\frac{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}\leqslant\frac{(b_1+1)^n}{(a_n+1)^n}$$

恒成立, 因此

$$\begin{aligned}&\frac{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}\\\leqslant&\left[\frac{(b_1+1)^n}{(a_n+1)^n}\right]_{\min}=\left(\frac{a_n+1}{a_n+1}\right)^n=1,\end{aligned}$$

当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=a_1=a_2=\cdots=a_n>0$ 时, "=" 成立, 所以

$$\frac{(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}\leqslant\frac{B+1}{A+1}.$$

题目 4 (2018 年全国高中数学联赛陕西预赛第二试第五题) 设 $a,b,c>0$. 证明:

$$\frac{a(a^2+bc)}{b+c}+\frac{b(b^2+ca)}{c+a}+\frac{c(c^2+ab)}{a+b}\geqslant ab+bc+ca.$$

证明 有对称性不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$, 则

$$\frac{a}{b+c}\leqslant\frac{b}{c+a}\leqslant\frac{c}{a+b}.$$

以 LHS 表示待证不等式的左端. 当 $a^2+bc\leqslant b^2+ca\leqslant c^2+ab$ 时, 即 $a+b\geqslant c$ 时, 由切比雪夫不等式

$$\begin{aligned}&3LHS\\\geqslant&\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+b}\right)\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right).\end{aligned}$$

由 Nesbitt 不等式知 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$. 且易知 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$. 故

$$3LHS\geqslant\frac{3}{2}\cdot 2(ab+bc+ca)\Leftrightarrow LHS\geqslant ab+bc+ca.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时, 等号成立. 当 $a+b<c$ 时,

$$\frac{c(c^2+ab)}{a+b}>c^2+ab>c(a+b)+ab=ab+bc+ca,$$

显然有 $LHS>ab+bc+ca$. 综上所述, 原不等式成立.

题目 4 的点评 参考答案先设序, 然后放缩, 再运用著名的切比雪夫不等式, 然后在运用著名的 Nesbitt 不等式进行证明, 过程虽然不是过于复杂, 但是多次运用著名不等式定理, 难度较大!

题目 4 的新证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{a(a^2+bc)}{b+c}+\frac{b(b^2+ac)}{c+a}+\frac{c(c^2+ab)}{a+b}-(ab+bc+ca)\\\geqslant&\frac{3c(c^2+c^2)}{2a}-3a^2=\frac{3(c^3-a^3)}{a}\end{aligned}$$

恒成立, 因此

(下转第 25 页)

构造差函数的思想也是做这类题的常见思想, 这类思想的本质其实就是根据 $f(x) \geqslant 0$ ($f(x) \leqslant 0$) 的形式等价于 $f(x)_{\min} \geqslant 0$ ($f(x)_{\max} \leqslant 0$), 之后求导, 根据导函数的特点, 选取参数适当的范围进行讨论, 进而求解本题. 这类思想也是较为容易的, 不需要对原函数进行复杂转化, 然而对于有些问题采取这种方式却是有些复杂, 甚至会出现无法进行下一步运算的结果. 此时我们可以采取另一种策略.

(三) 化简转化, 构造部分函数

有些原函数较为复杂, 直接采用上述方法, 较为繁琐, 不易将问题解决, 所以我们可以根据题干条件适当简化原函数, 进而在采取上述方法来解决, 这类思想在运用上灵活性较强, 对于学生来说也存在一定难度.

例 6 (2016 年高考全国卷文科) 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

1) 当 $a=4$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

2) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f(x)>0$, 求 a 的取值范围.

解 1) 略. 2) 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f(x)>0$, 即 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)=(x+1)\left[\ln x-\dfrac{a(x-1)}{(x+1)}\right]>0$, 所以只需证 $\ln x-\dfrac{a(x-1)}{(x+1)}>0$. 令 $g(x)=\ln x-\dfrac{a(x-1)}{(x+1)}$, 则 $g'(x)=\dfrac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)}$.

当 $a\leqslant 2$ 时, $x^2+2(1-a)x+1\geqslant x^2-2x+1>0$, 所以 $g'(x)>0$, 则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 且 $g(1)=0$, 因此 $g(x)>g(1)=0$.

当 $a>2$ 时, 令 $g'(x)=0$ 得 $x_1=a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}$, $x_2=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$, 由 $x_2>1$, 且 $x_1x_2=1$ 得 $x_1<1$, 故当 $x\in(1,x_2)$ 时, $g'(x)<0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1,x_2)$ 时单调递减, 所以 $g(x)<g(1)=0$, 与已知矛盾, 舍去.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$.

这道题, 原函数中有对数函数与一次函数的乘积的形式, 因此求导后, 必然既有对数又有一次函数的形式, 很难判断导函数的正负或是极值点, 也就不能判断参数的取值范围, 此方法很难进行, 根据题目条件适当进行化简, 则使得问题简单化, 求导后的函数为二次函数的形式, 更有助于我们的判断. 这种方法是较为难的, 且也是高考中容易出现的, 考察学生的综合能力. 在 2010 年高考全国卷 I 文科试题中有这样一道题: 已知 $f(x)=x\left(e^x-1\right)-ax^2$, 1) $a=\dfrac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调区间; 2) $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant 0$ 时, 求 a 的范围. 在这道题中的 2) 也是同样道理, 原函数存在指数函数与一次函数的乘积的形式, 求导后, 导函数中同样存在指数与一次函数乘积形式, 但是若提出 x, 函数就变为简单形式, 且 x 的范围是大于等于零的, 不影响不等式的判断. 这类题较难, 需要学生有较强的综合能力, 但同时也提升学生面对问题时, 能够考察学生灵活运用所学知识的能力, 锻炼学生的思维.

三、总结

本篇文章主要探讨函数中不等式恒成立问题中求参数取值范围的内容, 面对这类题, 一是可以直接进行求导, 若导函数是二次函数或是一次函数, 则可根据函数性质对参数范围进行判断, 若较为复杂可联系题干, 找隐含条件并充分利用. 二是原函数较为复杂, 导函数也复杂, 则采用构造函数的思想, 一般是分离参数法, 构造差函数和构造部分函数的形式. 并根据对题干的解读, 通过本文章的分析, 决定选取哪个方法, 从而解决问题.

参考文献

[1] 成银玉. 构造函数、利用导数解答不等式恒成立问题 [J]. 中学数学, 2014(12).

(上接第 43 页)

$$\frac{a\left(a^2+bc\right)}{b+c}+\frac{b\left(b^2+ac\right)}{c+a}+\frac{c\left(c^2+ab\right)}{a+b}-(ab+bc+ca)$$
$$\geqslant\left[\frac{3\left(c^3-a^3\right)}{a}\right]_{\max}=0,$$

当且仅当 $a=b=c$ 时 “=” 成立, 所以

$$\frac{a\left(a^2+bc\right)}{b+c}+\frac{b\left(b^2+ac\right)}{c+a}+\frac{c\left(c^2+ab\right)}{a+b}\geqslant ab+bc+ca.$$

二、感悟与启示

我们从上面给出的四个问题的参考答案不难发现, 这些问题的解答也都注意到了实数的有序性, 但是对实数的有序性公理却视而不见, 因为习惯了套路, 习惯了已有思维, 已有的经验, 已有的模式, 相信无论有多少迂回曲折, 还是可以运用最常用的杀手锏——一些著名的不等式定理、利用函数导数总能够使问题得到解决, 因此也就忘却了思考, 更忘却了创新思考, 因此过程繁难也就不足为怪, 另外, 如果作为一道奥林匹克竞赛题, 好像解法就不能简单已经成为不约而同遵守的 “原则”, 从而从某种意义上限制了人们的创新思考, 因此我们一定要从数学问题的本质出发探索和发现数学问题的内在联系, 追求自然, 崇尚简约, 多一点思考. 少一点套路, 让数学的美妙滋润每一位数学爱好者的心田.

参考文献

[1] 李文明. 不要冗长要简约 不要奖金要精美 [J]. 中学数学教学, 2018(4).