2018—2019学年度福州市高三第一学期质量抽测

数学（理科）试卷参考答案及评分标准

评分说明：

1.本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则.

2.对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后续部分的解答未改变试题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4.只给整数分数，填空题不给中间分.

一、选择题：

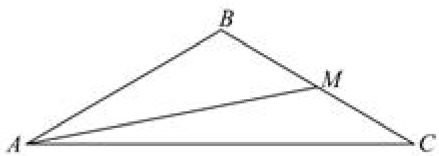
1.D　2.A　3.D　4.B　5.C　6.A　7.B　8.D　9.C　10.B　11.B　12.A

二、填空题：

13.3　14.1　15.13　16.$\left[\sqrt{2},+\infty\right)$

三、解答题：

17.（本小题满分12分）



解：（Ⅰ）由 $\cos\angle BAM=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

得 $\sin\angle BAM=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，…………………1分

由 $\cos\angle AMC=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

得 $\sin\angle AMC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ……………………2分

又 $\angle AMC=\angle BAM+\angle B$，

所以，$\cos B=\cos\left(\angle AMC-\angle BAM\right)$

$=\cos\angle AMC\cos\angle BAM+\sin\angle AMC\sin\angle BAM$

$=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{5\sqrt{7}}{14}+\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

$=-\dfrac{1}{2}$, ……………………………………………………………………… 5 分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………… 6 分

（Ⅱ）解法一：由（Ⅰ）知 $B=\dfrac{2\pi}{3}$，

在 $\triangle ABM$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{AM}{\sin\angle B}=\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}$，……………………………7 分

所以，$BM=\dfrac{AM\sin\angle BAM}{\sin\angle B}=\dfrac{\sqrt{21}\cdot\frac{\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$. ………………………………………… 9 分

因为 M 是边 BC 的中点，

所以，$MC=\sqrt{3}$. …………………………………………………………………………… 10 分

故 $S_{\Delta AMC}=\dfrac{1}{2}AM\cdot MC\cdot\sin\angle AMC=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{21}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………12 分

解法二：由（Ⅰ）知 $B=\dfrac{2\pi}{3}$，在 $\triangle ABM$ 中，

由正弦定理，得 $\dfrac{AM}{\sin\angle B}=\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}$，…………………………………………7 分

所以，$BM=\dfrac{AM\sin\angle BAM}{\sin\angle B}=\dfrac{\sqrt{21}\cdot\frac{\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$. ………………………………………… 9 分

因为 M 是边 BC 的中点，所以，$S_{\Delta AMC}=S_{\Delta ABM}$ …………………………………… 10 分

所以，$S_{\Delta AMC}=S_{\Delta ABM}=\dfrac{1}{2}AM\cdot BM\cdot\sin\angle BMA=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ……………………12 分

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

18.（本小题满分 12 分）

证法一：解：（Ⅰ）由条件知，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+1$，

所以，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$，所以，$b_{n+1}-b_n=1$，…………………………………………………………2 分

又 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$，所以，数列$\{b_n\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

故数列$\{b_n\}$的通项公式为：$b_n=n$.…………………………………………………………4 分

证法二：由条件，得 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_n+1}{a_n}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_n}=1$ ……………………………2 分

又 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$，所以，数列$\{b_n\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

故数列$\{b_n\}$的通项公式为：$b_n=n$.…………………………………………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$c_n=n\cdot 2^{n-1}$，

则 $S_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$，①…………………………………………………………5 分

$2S_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$ ②

由①-②得，$-S_n=2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n$ …………………………………………………………7 分

$$=\frac{2^0-2^{n-1}\times 2}{1-2}-n\cdot 2^n$$

$=-1+(1-n)\cdot 2^n$ …………………………………………………………8 分

$\therefore S_n=1+(n-1)\cdot 2^n$ …………………………………………………………9 分

$\because c_n>0$，$\therefore S_n-1\le\lambda c_n$ 恒成立，等价于 $\lambda\ge\dfrac{S_n-1}{c_n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

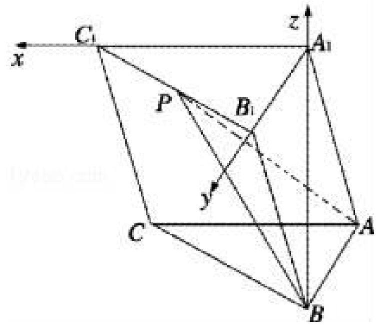
$\because \dfrac{S_n-1}{c_n}=\dfrac{(n-1)2^n}{n2^{n-1}}=2-\dfrac{2}{n}<2$，……………………………………………………………………………11 分

$\therefore \lambda \ge 2$.………………………………………………………………………………………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）证明：$\because$在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC, AC\perp BB_1$, 又 $AB\cap BB_1=B$，

$\therefore AC\perp$平面 ABB_1A_1，………………………………………………………………………2 分



又 $A_1B\subset$平面 ABB_1A_1，$\therefore AC\perp A_1B$，……………3 分

$\because BB_1=2\sqrt{2}$，

$\therefore AA_1=2\sqrt{2}$，

$\because AB=A_1B=2$，

$\therefore AB^2+A_1B^2=AA_1^2$，$\therefore A_1B\perp AB$，………………5 分

又 $AC\cap AB=A$，$\therefore A_1B\perp$平面 ABC．……………6 分

（Ⅱ）解法一：由（Ⅰ）知，直线 A_1C_1, A_1B_1, BA_1 两两互相垂直，如图，以 A_1 为原点，分别以 A_1C_1, A_1B_1, BA_1 所在直线为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系 A_1-xyz，………7 分

则 $A_1(0,0,0), P(1,1,0), B(0,0,-2), B_1(0,2,0)$ ……… 8 分

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$=(0，2，0)，$\overrightarrow{PB}=(-1,-1,-2)$，

设平面 PAB 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，所以，$\begin{cases}y=0\\ -x-y-2z=0\end{cases}$，………………………………………………………9 分

取 $z=1$, 则 $\vec{n}=(-2,0,1)$，……………………………………………………………………10 分

又 $\overrightarrow{BB_1}=(0,2,2)$，设直线 BB_1 与平面 PAB 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{BB_1}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{BB_1}\right|}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

∴直线 BB_1 平面 PAB 所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………………………………12 分

解法二：由（Ⅰ）知，直线 A_1C_1,A_1B_1,BA_1 两两互相垂直，以 A 为原点，分别以 AC 、AB 、Az 所在直线为 x,y,z 轴，建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$ ，………7 分

则 $A(0,0,0)$，A_1(0，2，2)，$P(1,3,2)$，$B(0,2,0)$，$B_1(0,4,2)$，$C_1(2,2,2)$…………8 分

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(-1,-1,-2)$，

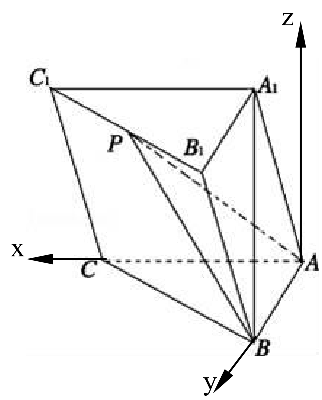
设平面 PAB 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，所以，$\begin{cases}y=0\\ -x-y-2z=0\end{cases}$，……………………………………………………9 分

取 $z=1$, 则 $\vec{n}=(-2,0,1)$，……………………………………………………………………10 分

又 $\overrightarrow{BB_1}=(0,2,2)$，设直线 BB_1 与平面 PAB 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{BB_1}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{BB_1}\right|}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.



∴直线 BB_1 平面 PAB 所成角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……… 12 分

20. （本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由题意，$k_{OA}\cdot k_l=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2b^2}{\sqrt{3}a^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{4}$,

即 $a^2=4b^2$ ①……………………………………………………………………2 分

又 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$ ②

联立①②，解得$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$……………………………………………………………………4 分

所以，椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.……………………………………………………5 分

（Ⅱ）设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),R(-x_1,-y_1)$，由$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+t \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，

得$x^2+\sqrt{3}tx+t^2-1=0$，

所以$\Delta=4-t^2>0$,即$-2<t<2$，

又因为$t\neq 0$，所以，$t\in(-2,0)\cup(0,2)$，

$x_1+x_2=-\sqrt{3}t, x_1\cdot x_2=t^2-1$，……………………………………………………………7 分

解法一：要证明$AM=AN$，可转化为证明直线AQ,AR的斜率互为相反数，只需证明$k_{AM}+k_{AN}=0$，即证明$k_{AQ}+k_{AR}=0$.

$$k_{AQ}+k_{AR}=\frac{y_1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1+1}+\frac{y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2-1}=\frac{\left(y_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x_2-1)+\left(y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2-1)}$$

$$\therefore \quad =\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x_2-1)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}x_1x_2+t(x_1+x_2)+\sqrt{3}}{(x_1+1)(x_2-1)}=\frac{\sqrt{3}(t^2-1)+t(-\sqrt{3}t)+\sqrt{3}}{(x_1+1)(x_2-1)}=0$$

…………………………………………………………………………………………………10 分

$\therefore k_{AM}+k_{AN}=0$,

$\therefore AM=AN$. ………………………………………………………………………………12 分

解法二：要证明$AM=AN$，可转化为证明直线AQ,AR与 y 轴交点 M、N 连线中点 S 的纵

坐标为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 AS 垂直平分 MN 即可。

直线 AQ 与 AR 的方程分别为：

$$l_{AQ}: y+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2-1}(x-1), l_{AR}: y+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-x_1-1}(x-1),$$

分别令 x=0，得 $y_M=\frac{-y_2-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}, y_N=\frac{-y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

而 $y_M+y_N=\frac{-y_2-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2-1}+\frac{-y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1+1}-\sqrt{3}$，同解法一，可得 $y_M+y_N=-\sqrt{3}$ ……10 分

$y_S=\frac{y_M+y_N}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 AS 垂直平分 MN.

所以，$AM=AN$. ……………………………………………………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由已知得，$f'(x)=-ae^{1-x}\left(x-\frac{a+1}{a}\right)$，……………………………1 分

由 $e^{-x}>0, a>0$，令 $f'(x)>0$ 得：$x<\frac{a+1}{a}$，

令 $f'(x)<0$ 得，$x>\frac{a+1}{a}$ ……………………………………………………………3 分

所以，当 $a>0$ 时，单调递增区间是$\left(-\infty,\frac{a+1}{a}\right]$；单调递减区间是$\left[\frac{a+1}{a},+\infty\right)$.……4 分

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-x^2+4x-m=(x-1)e^{1-x}-x^2+4x-m$，

$\therefore g'(x)=-\left(e^{1-x}+2\right)(x-2)$，…………………………………………………… 6 分

①解法一：由 $g'(x)<0$ 得，$x>2$；由 $g'(x)>0$ 得，$x<2$ 易知，$x=2$ 为 $g(x)$ 的极大值点，

$g(x)_{\max}=g(2)=\frac{1}{e}+4-m$，……………………………………………………………… 7 分

当 $x \to -\infty$ 时，$g(x) \to -\infty$；当 $x \to +\infty$ 时，$g(x) \to -\infty$.

由题意，只需满足 $g(x)_{\max} = \frac{1}{e} + 4 - m > 0$，

∴m 的取值范围是：$m < \frac{1}{e} + 4$.……………………………………………………………8 分

解法二：$f'(x) = -e^{1-x}\left(x-2\right)$，……………………………………………………………6 分

由 $f'(x) < 0$ 得，$x > 2$；由 $f'(x) > 0$ 得，$x < 2$ 易知，$x = 2$ 为极大值点。

而 $y = x^2 - 4x + m \quad \left(m \in \mathbf{R}\right)$ 在 x=2 时取得极小值，……………………………………7 分

由题意，只需满足 $f(x) = \frac{1}{e} > 2^2 - 8 + m$，解得 $m < \frac{1}{e} + 4$。……………………………8 分

②由题意知，x_1, x_2 为函数 $g(x) = f(x) - x^2 + 4x - m = \left(x-1\right)e^{1-x} - x^2 + 4x - m$ 的两个零点，由①知，不妨设 $x_1 < 2 < x_2$，则 $4 - x_2 < 2$，且函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty, 2\right)$ 上单调递增，

欲证 $x_1 + x_2 > 4$，

只需证明 $g\left(x_1\right) > g\left(4 - x_2\right)$，而 $g\left(x_1\right) = g\left(x_2\right)$，

所以，只需证明 $g\left(x_2\right) > g\left(4 - x_2\right)$.……………………………………………………9 分

令 $H(x_2) = g(x_2) - g(4 - x_2)\left(x_2 > 2\right)$，则 $H(x_2) = \left(x_2 - 1\right)e^{1-x_2} + \left(x_2 - 3\right)e^{x_2 - 3}$

$\therefore H'(x_2) = \left(x_2 - 2\right)\left(e^{x_2 - 3} - e^{1-x_2}\right)$

$\because x_2 > 2$，$\therefore \frac{e^{x_2 - 3}}{e^{1-x_2}} = e^{2x_2 - 4} > 1$，即 $e^{x_2 - 3} - e^{1-x_2} > 0$……………………………………10 分

所以，$H'(x_2) > 0$，即 $H(x_2)$ 在 $\left(2, +\infty\right)$ 上为增函数，

所以，$H(x_2) > H(2) = 0$，

$\therefore g\left(x_2\right) > g\left(4 - x_2\right)$ 成立，……………………………………………………………11 分

所以，$x_1 + x_2 > 4$.………………………………………………………………………12 分

请考生在第（22）、（23）二题中任选一题做答。注意：只能做所选定的题目。如果多做，则按所做的第一个题目计分，做答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22.（本小题满分 10 分）

解：（1）证明：依题意，$|OA|=|4\sin\beta|$，$|OB|=\left|4\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)\right|$，$|OC|=\left|4\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)\right|$，

………………………………………………………………………………………………3 分

$\because \frac{\pi}{3}<\beta<\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore |OB|+|OC|=4\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\beta=|OA|$.………………………………5 分

（2）当 $\beta=\frac{5\pi}{6}$ 时，直线 $\theta=\beta+\frac{\pi}{3}$ 与圆的交点 B 的极坐标为

$\left(4\sin\frac{7\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)=\left(-2,\frac{7\pi}{6}\right)=\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$，………………………………………………6 分

直线 $\theta=\beta-\frac{\pi}{3}$ 与圆的交点 C 点的极坐标为 $\left(4\sin\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$………………………7 分

从而，B、C 两点的直角坐标分别为：$B\left(\sqrt{3},1\right),C\left(0,4\right)$………………………………………8 分

$\therefore$ 直线 l 的方程为：$y=-\sqrt{3}x+4$，………………………………………………………………9 分

所以，$y_0=1,\alpha=\frac{2\pi}{3}$.…………………………………………………………………………………10 分

23.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=f(4-x)$，$x\in R$，所以 $f\left(x\right)$ 的图象关于 $x=2$ 对称. ………2 分

又 $f(x)=2\left|x+\frac{a}{2}\right|+3a$ 的图象关于 $x=-\frac{a}{2}$ 对称，…………………………………………………4 分

所以 $-\frac{a}{2}=2$，所以，$a=-4$.……………………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $f\left(x\right)\le-|2x-1|+a$ 等价于 $\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $|2x+a|+|2x-1|+2a\le 0$.

等价于 $\left(|2x+a|+|2x-1|+2a\right)_{\min}\le 0$.

设 $g\left(x\right)=|2x+a|+|2x-1|+2a$，………………………………………………………………6 分

则 $g(x)_{\min}=\left|\left(2x+a\right)-\left(2x-1\right)\right|+2a=|a+1|+2a$.………………………………………7 分

所以，$\left|a+1\right|+2a\le 0$.

当$a\ge -1$时，$a+1+2a\le 0, a\le -\frac{1}{3}$，所以，$-1\le a\le -\frac{1}{3}$；

当$a<-1$时，$-a-1+2a\le 0, a\le 1$，所以$a<-1$，……………………………………9分

综上，$a\le -\frac{1}{3}$.……………………………………………………………………10分

解法二：（Ⅰ）$\because f(x)=f(4-x)$

$\therefore \left|2x+a\right|+3a=\left|2(4-x)+a\right|+3a$，……………………………………2分

$\therefore \left|2x+a\right|=\left|8-2x+a\right|$，

即$2x+a=-\left(8-2x+a\right)$,或$2x+a=8-2x+a$（舍）……………………………………4分

所以，$a=-4$……………………………………………………………………5分

（Ⅱ）由$f\left(x\right)\le -\left|2x-1\right|+a$得，$\left|2x+a\right|+\left|2x-1\right|\le -2a$

而$\left|2x+a\right|+\left|2x-1\right|\ge \left|a+1\right|$……………………………………………………7分

由题意知，只需满足$\left|a+1\right|\le -2a$，即$2a\le a+1\le -2a$……………………………9分

即$\begin{cases}2a\le a+1\\ a+1\le -2a\end{cases}$，$\therefore a\le -\frac{1}{3}$.…………………………………………10分