

解题要创新 反思要悟道

—关于2016年福建省单科质检理科数学第20题的教学思考

福建省福州华侨中学(350004) 李文明

新课程倡导的是学生学习方式上的自主性、探究性、合作性,强调的是以培养学生创新精神和实践能力为核心的教学理念.这不仅是对教师的课堂教学提出了新的挑战,而且也是对新课程标准下的考试命题与解题提出了更高的要求.众所周知,解析几何不仅是高考命题的重中之重,其难度的控制更是令人难以把握;虽然其中原因诸多,但是如何突破计算的“瓶颈”,减少计算量,增加思维量不仅是命题专家所要面对的实际问题,也是中学解析几何教学实践必须认真思考和探究的问题.下面是笔者对一道福建省单科质检试题的探究过程和教学反思.

一、试题再现

题目 (2016年福建省单科质检理科第20题) 以椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的四个顶点为顶点的四边形的四条边与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 共有6个交点,且这6个点恰好把圆周六等分.

(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 若直线 l 与圆 O 相切,且与椭圆 M 相交于 P, Q 两点,求 $|PQ|$ 的最大值.

本题主要考查圆的方程、椭圆的标准方程、直线与圆锥曲线的位置关系等基础知识,考查推理论证能力、运算求解能力,考查数形结合思想、函数与方程思想、分类与整合思想等.

二、参考答案

解法一 (1) 如图1,依题意, $A(0, 1), B(a, 0), \angle OAB = 60^\circ$; 因为 $\tan \angle OAB = \frac{|BO|}{|AO|} = \frac{a}{1} = \sqrt{3}$, 故所求方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

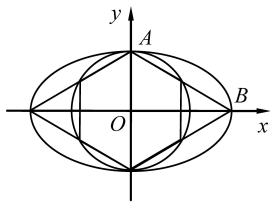


图1

(2) 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = \pm 1$,

代入 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 得 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$, $|PQ| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$; 当直线 l 斜率存在时, 设直线 l 方程为 $y = kx + m$. 因为直线 l 与圆 O 相切, 所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow m^2 = 1+k^2$, 由

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow (1+3k^2)x^2 + 6mkx + (3m^2-1) = 0,$$

所以

$$\Delta = 36m^2k^2 - 4(1+3k^2)(3m^2-1) = 24k^2 > 0 \Rightarrow k \neq 0.$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{6mk}{1+3k^2}, x_1x_2 = \frac{3m^2-1}{1+3k^2},$$

所以

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ &= 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{(1+k^2)2k^2}}{1+3k^2} \leq 2\sqrt{3} \frac{(1+k^2)+2k^2}{1+3k^2} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

当且仅当 $1+k^2 = 2k^2 \Rightarrow k = \pm 1$ 时等号成立, $|PQ|$ 的最大值是 $\sqrt{3}$. 综上所述, $|PQ|$ 的最大值是 $\sqrt{3}$.

解法二 (1) 同解法一. (2) 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = \pm 1$, 代入 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 得 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$, $|PQ| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$; 当直线 l 斜率存在时, 设直线 l 方程为 $y = kx + m$. 因为直线 l 与圆 O 相切, 所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow m^2 = 1+k^2$, 由

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow (1+3k^2)x^2 + 6mkx + (3m^2-1) = 0,$$

所以

$$\Delta = 36m^2k^2 - 4(1+3k^2)(3m^2-1) = 24k^2 > 0 \Rightarrow k \neq 0.$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{6mk}{1+3k^2}, x_1x_2 = \frac{3m^2-1}{1+3k^2},$$

所以

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = 2\sqrt{6} \frac{\sqrt{(1+k^2)k^2}}{1+3k^2}.$$

令 $t = 1 + 3k^2$. 因为 $k \neq 0 \Rightarrow t > 1$, 于是

$$|PQ| = 2\sqrt{6} \frac{\sqrt{(1+k^2)k^2}}{1+3k^2} \\ = \frac{2\sqrt{6}}{3} \sqrt{-\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t} + 1} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \sqrt{-2(\frac{1}{t} - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8}},$$

因为 $t > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{t} < 1 \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$, $|PQ|_{\min} = \sqrt{3}$. 综上所述, $|PQ|$ 的最大值是 $\sqrt{3}$.

三、创新求解

从上述参考答案给出的两种解法, 不难发现, 两种解法思考方法大同小异, 都运用“分类整合思想”对直线的斜率是否存在进行了讨论, 只是在处理两点间距离的结果时, 采取了不同的方法, 方法一运用“基本不等式”求极值; 方法二运用“换元法”和函数思想求极值; 这充分展现了解决极值问题的两种常用方法的重要性. 由此可见, 这是一道完全符合命题目的的解析几何试题.

教师要培养学生的创新精神; 就要身先士卒, 解决问题就不能套路优先, 亦步亦趋, 解决问题就要学会具体问题具体分析, 审时度势, 认真分析, 学会趋利避害, 顺势而为, 教学过程中我们先根据参考答案的解法对学生进行引导, 但是学生总是觉得老师“太高明”, 总是觉得“技不如人”; 于是我们对问题进行再思考, 再分析, 和学生一起探寻新的突破口, 借助“向量”数形兼备的特点, 利用“相关点法”解决如下:

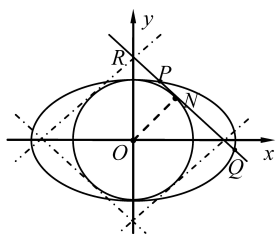


图 2

解 如图 2, 设点 $N(x_0, y_0)$ 是圆 O 上的任意一点, 点 $R(x, y)$ 为过点 N 的圆 O 切线 l 上的任意一点, 切线 l 与椭圆 $M: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的交点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 则

$$x_0^2 + y_0^2 = 1, \overrightarrow{NR} \perp \overrightarrow{ON} \\ \Rightarrow (x - x_0)x_0 + (y - y_0)y_0 = 0 \Rightarrow xx_0 + yy_0 = 1.$$

因为 $x_0 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1 - yy_0}{x_0}$, 由 $\begin{cases} x = \frac{1 - yy_0}{x_0} \\ x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$ 消去

x 得到 $(3x_0^2 + y_0^2)y^2 - 2y_0y + 1 - 3x_0^2 = 0$. 所以

$$y_1 + y_2 = \frac{2y_0}{3x_0^2 + y_0^2} = \frac{2y_0}{2x_0^2 + 1}, y_1y_2 = \frac{1 - 3x_0^2}{2x_0^2 + 1},$$

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ = \sqrt{\frac{1}{x_0^2}[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]} \\ = \frac{2\sqrt{6}|x_0|}{2x_0^2 + 1} \leq \frac{2\sqrt{6}|x_0|}{2\sqrt{2}|x_0|} = \sqrt{3}$$

当且仅当 $x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 即这样的切线共有 4 条, 切点有 4 个.

点评 由此可见, 原题的命题目标, 未必都能够实现; 这正是“分类不必要, 解法需创新”! 对数学本质要有深刻的理解; 万万不可僵化, 要“活学活用”! “套路”不等于“通法”. 真正的通法是通向能够揭示数学问题本质的最基本方法.

四、反思悟道

定理 1 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0, c = \sqrt{a^2 - b^2})$ 和圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$, 若圆 O 的切线 l 与椭圆 M 相交于 P, Q 两点, 当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$ 时, 则 $|PQ|$ 最大值为 a ;

当 $0 < e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 则 $|PQ|$ 最大值为 $2eb$.

证明 设点 $N(x_0, y_0)$ 是圆 O 上的任意一点, 点 $R(x, y)$ 为过点 N 的圆 O 切线 l 上的任意一点, 切线 l 与椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的交点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 则

$$x_0^2 + y_0^2 = b^2, \overrightarrow{NR} \perp \overrightarrow{ON}$$

$$\Rightarrow (x - x_0)x_0 + (y - y_0)y_0 = 0 \Rightarrow xx_0 + yy_0 = b^2.$$

因为 $x_0 \neq 0$, 从而 $x = \frac{b^2 - yy_0}{x_0}$. 由 $\begin{cases} x = \frac{b^2 - yy_0}{x_0} \\ b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \end{cases}$ 消去 x 得到 $(a^2x_0^2 + b^2y_0^2)y^2 - 2b^4y_0y + b^6 - a^2b^2x_0^2 = 0$. 所以

$$y_1 + y_2 = \frac{2b^4y_0}{a^2x_0^2 + b^2y_0^2} = \frac{2b^4y_0}{c^2x_0^2 + b^4}, y_1y_2 = \frac{b^6 - a^2b^2x_0^2}{c^2x_0^2 + b^4},$$

当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$ 时,

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ = \sqrt{\frac{b^2}{x_0^2}[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]} \\ = \frac{2ab^2c}{c^2|x_0| + \frac{b^4}{|x_0|}} \leq \frac{2ab^2c}{2cb^2} = a,$$

当且仅当 $x_0 = \pm \frac{b^2}{c}$ 时等号成立, 即这样的切线共有 4 条, 切点有 4 个.

一个圆锥曲线定值问题的解法和推广

江苏省启东市汇龙中学 (226200) 倪红林

圆锥曲线是解析几何的重要内容之一,是高考的重点考查内容.特别是圆锥曲线中的定点与定值问题,一直是高考的热点问题.解决此类问题常见的方法有两种:一是从特殊入手,求出定点(定值),再证明这个点(值)与变量无关;二是直接推理、计算,并在计算推理的过程中消去变量,从而得到定点(定值).下面举一个具体例子加以说明.

例1 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左顶点为 A ,过 A 作两条互相垂直的弦 AM, AN 交椭圆于 M, N 两点.

(1) 当直线 AM 的斜率为 1 时,求点 M, N 的坐标;

(2) 当直线 AM 的斜率变化时,直线 MN 是否过一定点?若过定点,请给出证明,并求出该定点;若不过定点,请说明理由.

解 (1) 得 $M(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}), N(-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5})$;

(2) 假设 MN 过一定点,则由 $A(-2, 0)$ 和椭圆的对称性知,定点一定在 x 轴上,又由 (1) 知定点坐标为 $Q(-\frac{6}{5}, 0)$. 证明如下.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$; $AM: y = k(x + 2)$, 则 $AN: y = -\frac{1}{k}(x + 2)$, 直线 AM 与椭圆联立消去 y , 得:

$$(4k^2 + 1)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0;$$

-2 和 x_1 是这个方程的两个解,由韦达定理: $x_1 - 2 = -\frac{16k^2}{4k^2 + 1}$. 从而 $x_1 = \frac{4}{4k^2 + 1} - 2$, 则 $y_1 = k(x_1 + 2) = \frac{4k}{4k^2 + 1}$; 由直线 AN 和椭圆联立消去 y , 得:

$$(k^2 + 4)x^2 + 16x + 16 - 4k^2 = 0;$$

-2 和 x_2 是这个方程的两个解,由韦达定理: $x_2 - 2 = -\frac{16}{k^2 + 4}$. 从而 $x_2 = 2 - \frac{16}{k^2 + 4}$, 则

$$y_2 = -\frac{(x_2 + 2)}{k} = -\frac{4k}{k^2 + 4};$$

所以

$$M(\frac{4}{4k^2 + 1} - 2, \frac{4k}{4k^2 + 1}), N(2 - \frac{16}{k^2 + 4}, \frac{-4k}{k^2 + 4}), Q(-\frac{6}{5}, 0);$$

则

$$k_{MQ} = \frac{5k}{4(1 - k^2)}, k_{NQ} = \frac{5k}{4(1 - k^2)}.$$

由于 $k_{MQ} = k_{NQ}$, 所以 M, Q, N 三点共线. 即 MN 必然过定点 $Q(-\frac{6}{5}, 0)$.

本题研究的是一个特殊椭圆的一个定点性质,由类比推理的思想,这种性质能否辐射到一般的椭圆,甚至其它圆锥曲线呢?

当 $0 < e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{x_0^2}[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]} = \frac{2ab^2c}{c^2|x_0| + \frac{b^4}{|x_0|}},$$

由于 $|x_0| \leq b$, 所以

$$|PQ| = \frac{2ab^2c}{c^2|x_0| + \frac{b^4}{|x_0|}} \leq \frac{2acb^2}{c^2b + b^3} = 2eb$$

即当 $|x_0| = b$ 时, $|PQ|_{\max} = 2eb$, 切点有两个 $(-b, 0), (b, 0)$, 切线有 2 条 $x = \pm b$

同理可证如下的

定理2 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0, c = \sqrt{b^2 - a^2})$ 和圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$, 若圆 O 的切线 l 与椭圆 M 相交于 P, Q 两点, 当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$ 时, 则 $|PQ|$ 最大值为 b ; 当 $0 < e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 则 $|PQ|$ 最大值为 $2ea$.

由此不难发现,解决数学问题如果事先设定“条条框框”,思维就会受到不应有“束缚”;即使是数学专业知识渊博,思维敏锐的专家也会受到干扰和影响,因此数学教学要不断激发学生的学习热情,数学思考的激情,只有让数学教学在不断的创新过程中进行,才是学生学好数学的不竭动力!